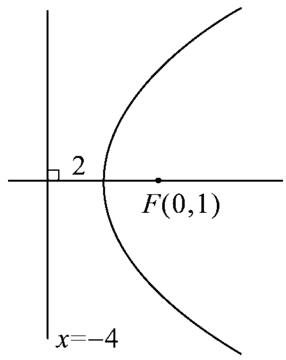
| 高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：100.02.26 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 1-2 拋物線 A | 班級 | 二年____班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

## 一、填充題 (每題 10 分 )

1.關於拋物線$(y-1)^2=8(x+2)$，試回答下列問題：

(1)頂點是____________． (2)焦點是____________． (3)正焦弦長是____________．

(4)對稱軸是____________． (5)準線是____________．




解答 (1)$(-2,1)$;(2)$(0,1)$;(3)8;(4) $y=1$;(5) $x=-4$

解析 $(y-1)^2=8(x+2)\Rightarrow(y-1)^2=4\times2\times(x+2), c=2$ 如圖，則

(1)$(-2,1)$．

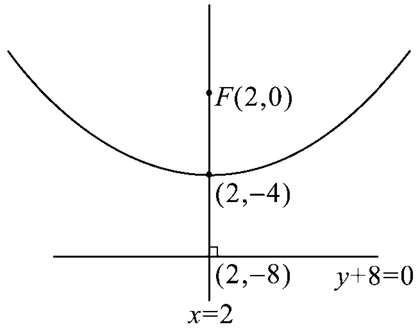
(2)$\because c=2$ 且開口向右，$\therefore$焦點是$(-2+2,1)=(0,1)$．

(3)$4|c|=4\times2=8$．

(4)水平線 $y=1$．

(5)鉛垂線 $x=-2-2\Rightarrow x=-4$．

2.焦點為$(2,0)$，準線為$y+8=0$的拋物線方程式為____________．

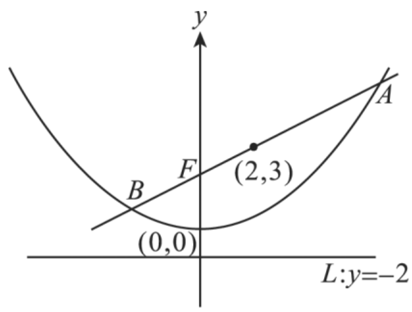



解答 $(x-2)^2=16(y+4)$

解析 由右圖得頂點$(2,-4)$，$c=4$，開口向上，

$\therefore$拋物線方程式為$(x-2)^2=16(y+4)$．

3. $A$、$B$ 兩點在拋物線 $y=\frac{1}{8}x^2$ 上，且 $\overline{AB}$ 的中點坐標為$(2,3)$，若 $F$ 為拋物線的焦點，則$\overline{AF}+\overline{BF}=$____________．




解答 10

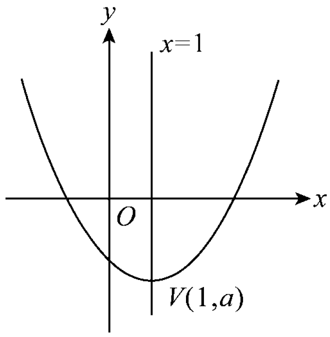
解析 原式$\Rightarrow x^2=8y\Rightarrow$頂點$(0,0)$，$c=2$，開口向上，

設$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且

$$(2,3)=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})\Rightarrow y_1+y_2=6$$

$$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}=d(A,L)+d(B,L)=(y_1+c)+(y_2+c)=(y_1+y_2)+2c=6+4=10$$．

4.設拋物線通過$(3,0)$、$(5,6)$且其對稱軸為$x=1$，則其方程式為________．



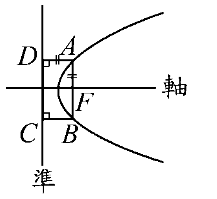

解答 $(x-1)^2=2(y+2)$

解析 設 $\Gamma:(x-1)^2=4c(y-a)$，

將點$(3,0)$、$(5,6)$代入$\Gamma \Rightarrow \begin{cases} 4=4c(-a)\cdots\cdots① \\ 16=4c(6-a)\cdots\cdots② \end{cases}$

$\dfrac{②}{①} \Rightarrow 4=\dfrac{6-a}{-a} \Rightarrow a=-2$代回①，得$4c=2$，故$\Gamma:(x-1)^2=2(y+2)$．

5. $A$、$B$為拋物線$\Gamma: x-2y^2-4y+1=0$的正焦弦兩端點，分別過$A$、$B$向$\Gamma$的準線作垂線，垂足分別為$D$、$C$，則矩形$ABCD$的面積為____________．



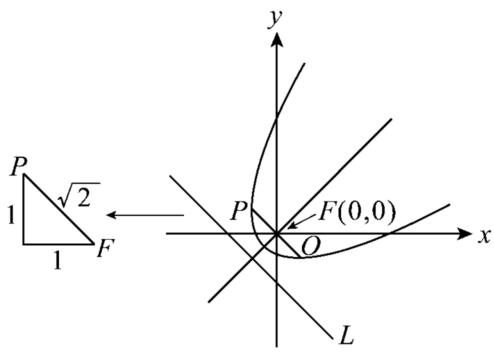

解答 $\dfrac{1}{8}$

解析 $\Gamma: x+1=2(y+1)^2-2 \Rightarrow (y+1)^2=\dfrac{1}{2}(x+3)$，

$\therefore$矩形$ABCD$面積為$\overline{AB}\times\overline{AD}=4c\times 2c=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$．

6.已知拋物線的焦點$(0,0)$，準線$x+y+2=0$，若$\overline{PQ}$為正焦弦，

$P$在第二象限，則$P$的坐標為____________．



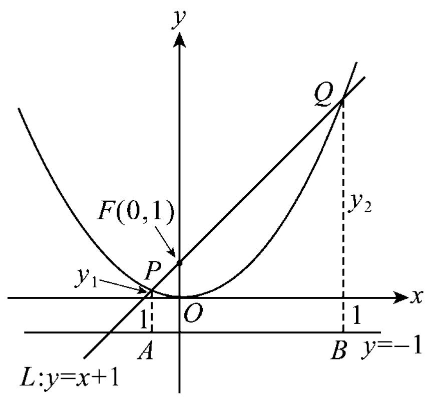

解答 $(-1,1)$

解析 正焦弦長$=2d(F,L)=2\left|\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$，

$\therefore \overline{PF}=\sqrt{2}$，$P:(0,0)+\sqrt{2}\cdot\dfrac{(-1,1)}{\sqrt{2}}$

$\therefore P$點的坐標為$(-1,1)$．

7.在坐標平面上，設直線$L: y=x+1$與拋物線$\Gamma: x^2=4y$相交於$P$、$Q$兩點．若$F$表拋物線$\Gamma$的焦點，則$\overline{PF}+\overline{QF}=$____________．




解答 8

解析 $x^2=4y \Rightarrow$頂點$(0,0)$，焦點$(0,1)$，

$y=x+1 \Rightarrow x=y-1$代入$x^2=4y$

$\Rightarrow (y-1)^2=4y \Rightarrow y^2-6y+1=0$，

設二根$y_1$、$y_2$，則$y_1+y_2=6$，

$\therefore \overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PA}+\overline{QB}$

$=(y_1+1)+(y_2+1)=(y_1+y_2)+2=6+2=8$．

8.設一拋物線的對稱軸平行於$x$軸且過$(1,1)$、$(3,2)$、$(3,-1)$三點，則拋物線方程式為____________．

解答 $x=y^2-y+1$

解析 設$x=ay^2+by+c$，過$(1,1)$、$(3,2)$、$(3,-1)$，

$$\therefore \begin{cases} 1=a+b+c \\ 3=4a+2b+c \\ 3=a-b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \quad \therefore \text{拋物線方程式為 } x=y^2-y+1 \text{ .}$$

9.拋物線的準線垂直 $x$ 軸且過三點 $(1,0)$、$(-1,1)$、$(5,-1)$，則此拋物線的焦點坐標為＿＿＿＿＿＿＿＿ .

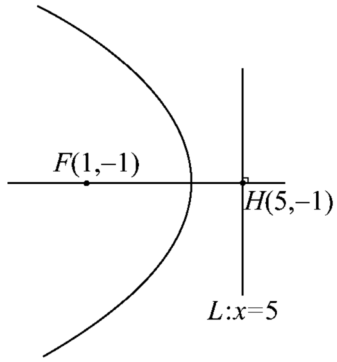
解答 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$

解析 ∵左右型，∴令 $x=ay^2+by+c$，點代入：$\begin{cases} 1=c \\ -1=a+b+c \\ 5=a-b+c \end{cases} \Rightarrow (a,b,c)=(1,-3,1)$，

$$x=y^2-3y+1 \Rightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^2=x-1+\frac{9}{4}=x+\frac{5}{4} \Rightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4\cdot\frac{1}{4}\left(x+\frac{5}{4}\right)$$

∵頂點 $\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right)$， $c=\dfrac{1}{4}$， ∴焦點 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ .

10.拋物線的準線方程式為 $x-5=0$，焦點坐標為 $(1,-1)$，則此拋物線的方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿ .




解答 $(y+1)^2=-8(x-3)$

解析 頂點 $(3,-1)$， $c=-2 \Rightarrow$ 左右型，

∴拋物線方程式為

$$(y+1)^2=4\times(-2)\times(x-3) \Rightarrow (y+1)^2=-8(x-3) \text{ .}$$

11.「$P$ 點與 $F(5,0)$ 之距離」比「$P$ 到直線 $L:x+8=0$ 之距離」多 2，則 $P$ 點的軌跡方程式為＿＿＿＿＿ .

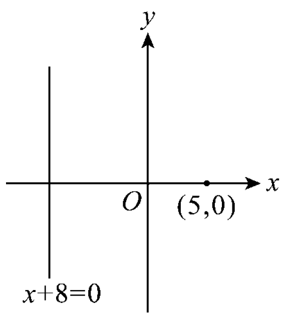
解答 $y^2=30\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$

解析 Sol 一

設動點 $P(x,y)$， $\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\dfrac{|x+8|}{\sqrt{1}}+2=x+10$

（因為 $x+8>0$ ）$\Rightarrow (x-5)^2+y^2=(x+10)^2 \Rightarrow x^2-10x+25+y^2=x^2+20x+100$，

$$\therefore y^2=30x+75=30\left(x+\frac{5}{2}\right) \text{ .}$$




Sol 二

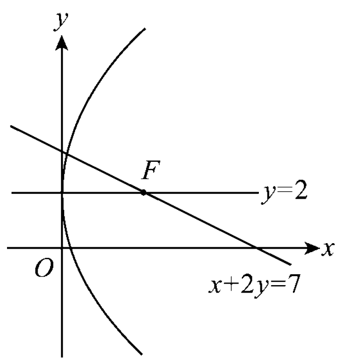
「$P$ 點與 $F(5,0)$ 之距離」比「$P$ 到直線 $L:x+8=0$ 之距離」多 2

$\Rightarrow$「$P$ 點與 $F(5,0)$ 之距離」等於「$P$ 到直線 $L:x+10=0$ 之距離」

軌跡為『以 $F(5,0)$ 為焦點，直線 $L:x+10=0$ 為準線的拋物線』

即頂點 $(-\dfrac{5}{2},0)$， $c=5-(-\dfrac{5}{2})=\dfrac{15}{2}$

$\Rightarrow (y-0)^2=4(\dfrac{15}{2})(x+\dfrac{5}{2})$， $y^2=30\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$




12.一拋物線的頂點在 $y$ 軸上，軸為 $y=2$，而焦點在 $x+2y=7$ 上，則此拋物線的

方程式為__________.

解答 $(y-2)^2=12x$

解析 焦點$F:\begin{cases}x+2y=7\\y=2\end{cases}\Rightarrow F(3,2)$，

又頂點$(0,2)$， $\therefore c=3\Rightarrow$方程式為$(y-2)^2=12x$ .

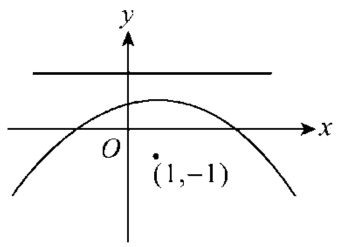
13.焦點為$(1,-1)$，準線垂直於$y$軸，正焦弦長為 8 的拋物線方程式為______.

解答 $(x-1)^2=-8(y-1)$或$(x-1)^2=8(y+3)$

解析 $\because 4|c|=8\Rightarrow c=\pm 2$，

① $c=-2$，頂點$(1,1)$，

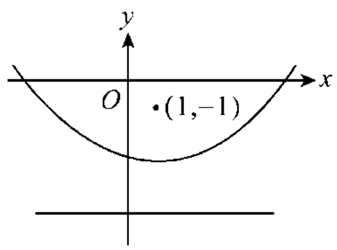
$\therefore$方程式為$(x-1)^2=-8(y-1)$ .（如右上圖一）



〈圖一〉

② $c=2$，頂點$(1,-3)$，

$\therefore$方程式為$(x-1)^2=8(y+3)$ .（如右下圖二）



〈圖二〉

由①②可知，

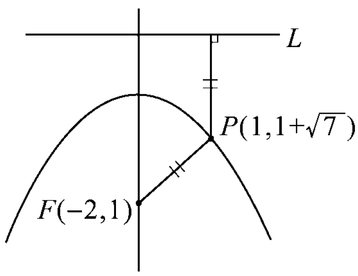
拋物線方程式為$(x-1)^2=-8(y-1)$或$(x-1)^2=8(y+3)$ .

14.已知拋物線$\Gamma$的焦點坐標為$(-2,1)$且對稱軸平行$y$軸；若$\Gamma$過點$\left(1,1+\sqrt{7}\right)$，則$\Gamma$的準線方程式為____________.

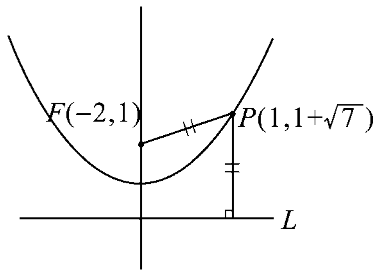
解答 $y=5+\sqrt{7}$或$y=-3+\sqrt{7}$

解析 $\overline{PF}=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}=4=d(P,L)$，

① $L:y=\left(1+\sqrt{7}\right)+4\Rightarrow y=5+\sqrt{7}$ . (右上圖)



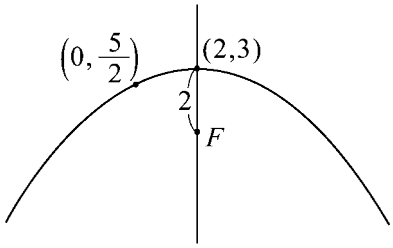

② $L:y=\left(1+\sqrt{7}\right)-4\Rightarrow y=-3+\sqrt{7}$ . (右下圖)




由①②可知，準線方程式為$y=5+\sqrt{7}$或$y=-3+\sqrt{7}$ .

15.拋物線$\Gamma$的頂點為$(2,3)$且過點$\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$，其對稱軸平行$y$軸，則

(1)拋物線方程式____________. (2)焦點坐標____________.




解答 (1)$(x-2)^2=-8(y-3)$;(2)$(2,1)$

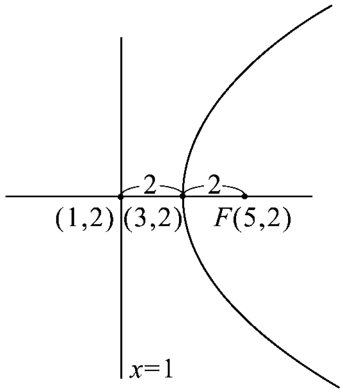
解析 (1)設拋物線$(x-2)^2=4c(y-3)$過$\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow(-2)^2=4c\left(-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow c=-2$， $\therefore$所求$(x-2)^2=-8(y-3)$ .

(2)焦點$F(2,3-2)=(2,1)$ .

16.設一拋物線的頂點為$(3,2)$，焦點為$(5,2)$，則

(1)此拋物線的方程式__________ . (2)準線方程式為__________ .



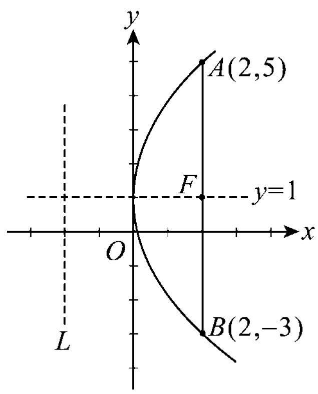

解答 (1)$(y-2)^2=8(x-3)$;(2)$x=1$

解析 如右圖： $c=2$，

(1)拋物線方程式為$(y-2)^2=8(x-3)$ .

(2)準線方程式為$x=1$ .

17.拋物線的正焦弦兩端點為$A(2,5)$，$B(2,-3)$且拋物線的開口向右，則此拋物線方程式為________ .



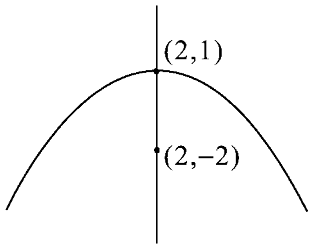

解答 $(y-1)^2=8x$

解析 $\overline{AB}=8=4c$，拋物線的開口向右，$\therefore c=2$，焦點$F(2,1)$，

對稱軸$y=\dfrac{1}{2}(5+(-3))=1\Rightarrow$頂點$(0,1)$，

$\therefore$拋物線方程式為$(y-1)^2=8x$ .

18.頂點$(2,1)$，焦點$(2,-2)$的拋物線方程式為$(x-h)^2=4c(y-k)$，則$h+k+c=$_____ .




解答 0

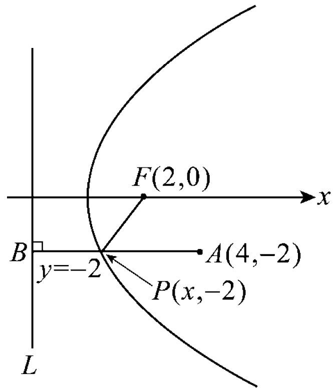
解析 頂點$(2,1)$， $c=-3$，開口向下，

$\therefore$拋物線方程式為$(x-2)^2=-12(y-1)$，

$\therefore h+k+c=2+1-3=0$ .

19.拋物線$\Gamma: y^2=8x$的焦點為$F$， $P$為$\Gamma$上的動點，點$A(4,-2)$，當$\overline{PA}+\overline{PF}$

有最小值時，此時$P$點坐標為________ .

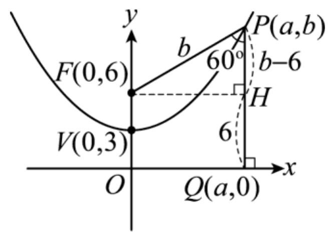



解答 $\left(\dfrac{1}{2},-2\right)$

解析 $\overline{PF}+\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PA}\geq\overline{AB}$，

$\therefore y=-2$ 代入 $y^2=8x\Rightarrow(-2)^2=8x\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$， $\therefore P\left(\dfrac{1}{2},-2\right)$ .

20.坐標平面上有一以點$V(0,3)$為頂點、$F(0,6)$為焦點的拋物線．設$P(a,b)$為此拋物線上一點，$Q(a,0)$為 $P$ 在 $x$ 軸上的投影，滿足$\angle FPQ=60^\circ$，則$b=$____________ .



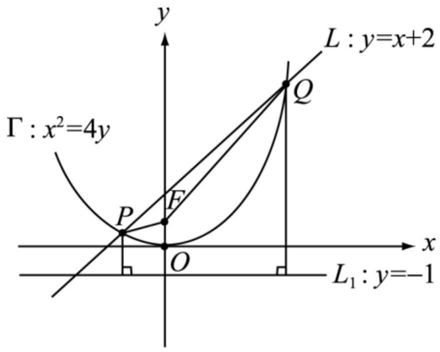

解答 12

解析 如圖 $x$ 軸為準線 $\therefore\overline{PF}=\overline{PQ}=b$

$\triangle PFH$中，$\overline{PF}=2\overline{PH}\Rightarrow b=2(b-6)\Rightarrow b=12$ .

21.在坐標平面上，設直線$L:y=x+2$與拋物線$\Gamma:x^2=4y$相交於 $P$、$Q$ 兩點．若 $F$ 表拋物線 $\Gamma$ 的焦點，則$\overline{PF}+\overline{QF}=$____________ .

解答 10




解析 $\begin{cases}x^2=4y\cdots② \\ y=x+2\Rightarrow x=y-2\cdots①\end{cases}$

由①代入②得

$(y-2)^2=4y\Rightarrow y^2-8y+4=0\cdots\cdots(*)$，

設$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$．則(*)二根為$y_1,y_2$

$y_1+y_2=-\dfrac{-8}{1}=8$

又由拋物線的定義知：

$\overline{PF}=d(P,L_1)$，$\overline{QF}=d(Q,L_1)$，其中 $L_1:y=-1$為拋物線$x^2=4y$的準線，

故$\overline{PF}+\overline{QF}=d(P,L_1)+d(Q,L_1)=(y_1+1)+(y_2+1)=(y_1+y_2)+2=8+2=10$ .

22.與直線$L:x+12=0$相切且與圓$C:x^2+y^2=16$相切的圓其圓心軌跡方程式為____________ .

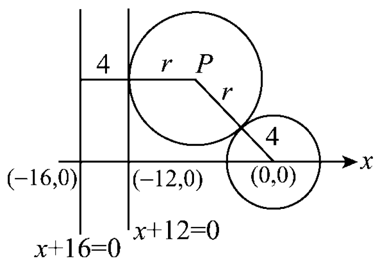
解答 $y^2=32(x+8)$或$y^2=16(x+4)$

解析 設圓心為$P$，半徑為$r$，

①與圓$C$外切，

由圖知：即以$(0,0)$為焦點，$x+16=0$為準線的拋物線

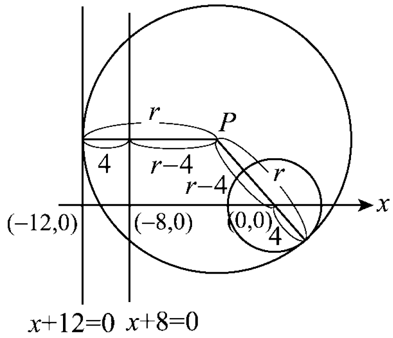
$\Rightarrow$頂點$(-8,0)$，$c=8$，開口向右， $\therefore$方程式為$y^2=32(x+8)$ .



②與圓 $C$ 內切，

由圖知：即以 $(0,0)$ 為焦點，$x+8=0$ 為準線的拋物線

$\Rightarrow$ 頂點 $(-4,0)$，$c=4$，開口向右，　$\therefore$ 方程式為 $y^2=16(x+4)$ ．

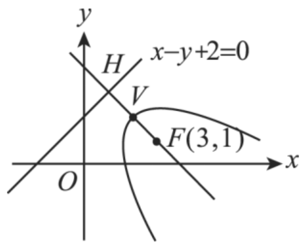



由①②可知，方程式為 $y^2=32(x+8)$ 或 $y^2=16(x+4)$ ．

23.方程式 $\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$ 所表示的圖形為拋物線，其頂點為______________ ．

解答　$(2,2)$

解析　焦點 $F(3,1)$，準線：$x-y+2=0$，如圖，

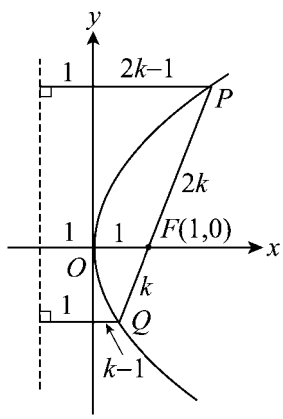



設軸方程式為 $x+y=k$，

$(3,1)$ 代入得 $k=4$，$\therefore$ 軸：$x+y-4=0$，解 $\begin{cases}x-y+2=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow H(1,3)$，

$\overline{FH}$ 的中點即為頂點 $V(2,2)$ ．

24.在坐標平面上，過 $F(1,0)$ 的直線交拋物線 $y^2=4x$ 於 $P$、$Q$ 兩點，$P$ 在上半平面且 $\overline{PF}=2\overline{QF}$，則 $P$ 的 $x$ 坐標為______________ ．




解答　2

解析　Sol 一

$\because \overline{PF}=2\overline{QF}$，$\therefore$ 設 $\overline{PF}=2k$，$\overline{QF}=k$，

$\therefore P(2k-1,y_1)$，$Q(k-1,y_2)$，

由分點公式：$1=\dfrac{2(k-1)+(2k-1)}{3}\Rightarrow 3=4k-3$，$k=\dfrac{3}{2}$，

故所求為 $2k-1=3-1=2$ ．

Sol 二代公式 $c=\dfrac{ab}{a+b}\Rightarrow 1=\dfrac{2k\cdot k}{2k+k},2k^2-3k=0\Rightarrow k(2k-3)=0,k=\dfrac{3}{2},0$ (不合)

故所求 $x$ 坐標為 $2k-1=3-1=2$

25.若拋物線的焦點為 $F(0,0)$，準線為 $L:x+y=2$，則

(1)此拋物線的方程式為______________ ．（須化成 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的形式）

(2)此拋物線的正焦弦長為______________ ．

解答　(1) $x^2-2xy+y^2+4x+4y-4=0$;(2) $2\sqrt{2}$

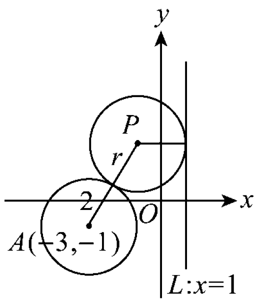
解析　(1)設 $P(x,y)$，$\because \overline{PF}=d(P,L)$，$\therefore \sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$，

平方移項 $\Rightarrow 2(x^2+y^2)=x^2+y^2+4+2xy-4y-4x\Rightarrow x^2-2xy+y^2+4x+4y-4=0$ ．

(2) $4|c| = 2 \times d(F,L) = 2 \times \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ .

26.若一動圓與定圓 $C:(x+3)^2+(y+1)^2=4$ 外切，且與直線 $L:x=1$ 相切，則此動圓圓心的軌跡方程式為____________ .

解答 $(y+1)^2=-12x$




解析 Sol 一

設此動圓圓心 $P(x,y)$，半徑為 $r$，則 $\overline{PA}=r+2$， $d(P,L)=|x-1|=r$，

$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}=|x-1|+2 \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}=-x+3$

（$\because x-1<0$ ）

$\overset{\text{平方}}{\Rightarrow} x^2+6x+9+y^2+2y+1=x^2-6x+9$

$\Rightarrow y^2+2y+1=-12x \Rightarrow (y+1)^2=-12x$ .

Sol 二

原題意即「 $P$ 點與 $A(-3,-1)$ 之距離」等於「 $P$ 到直線 $L:x=3$ 之距離」

軌跡為『以 $A(-3,-1)$ 為焦點，直線 $L:x=3$ 為準線的拋物線』

其頂點 $(0,-1)$, $c=-[0-(-3)]=-3$

$\Rightarrow (y+1)^2=4(-3)(x-0) \Rightarrow (y+1)^2=-12x$

27.過 $A(3,2)$ 且與 $(x+1)^2=12(y-2)$ 共焦點，共對稱軸的拋物線方程式為____________ .

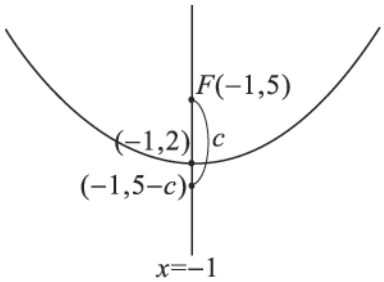
解答 $(x+1)^2=16(y-1)$ 或 $(x+1)^2=-4(y-6)$

解析 原拋物線頂點 $(-1,2)$， 又 $4c=12 \Rightarrow c=3 \Rightarrow F(-1,5)$，若新頂點 $(-1,k)$ ，則 $k+c=5$

故新頂點為 $(-1,5-c)$，新拋物線方程式為 $(x+1)^2=4c[y-(5-c)]$，

又過 $A(3,2) \Rightarrow 16=4c(2-(5-c)) \Rightarrow 4=c(c-3) \Rightarrow c^2-3c-4=0$

$\Rightarrow (c-4)(c+1)=0 \Rightarrow c=4$ 或 $-1$，




① $c=4$，開口向上，新頂點 $(-1,1)$ $\Rightarrow (x+1)^2=16(y-1)$ .

② $c=-1$，開口向下，新頂點 $(-1,6)$ $\Rightarrow (x+1)^2=-4(y-6)$ .

由①②所求為 $(x+1)^2=16(y-1)$ 或 $(x+1)^2=-4(y-6)$ .