高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：100.01.06					
範圍	3-2 圓與直線	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題　(每題 10 分)

1.若圓 $5x^2+5y^2-4x-6y+k=0$ 與 y 軸相切，則 $k=$ ____________ .

解答　$\frac{9}{5}$

解析　當 $x=0\Rightarrow 5y^2-6y+k=0$，$\because$ 與 y 軸相切，恰有一解

$\therefore$ 判別式 $D=(-6)^2-4\cdot 5\cdot k=0\Rightarrow k=\frac{9}{5}$.

2.過 $A(2,3)$ 且與圓 C： $x^2+y^2=13$ 的切線方程式為____________ .

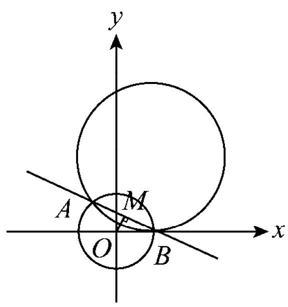
解答　$2x+3y=13$

解析　$A(2,3)$ 在圓上即為切點，利用切點公式得切線為 $2x+3y=13$.

3.兩圓 C_1： $x^2+y^2=1$， C_2： $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 的公共弦長為____________ .

解答　$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

解析



C_1-C_2 得 $\overleftrightarrow{AB}$ 為 $x+2y-1=0$，

$\triangle OBM$ 中， $\overline{OM}=\frac{|1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$， $\overline{AB}=2\overline{BM}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

4.一圓與兩直線 $3x-2y+1=0$， $3x-2y-5=0$ 均相切，且圓心在 $x+y-2=0$ 上，則此圓的方程式為

____________ .

解答　$\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{13}$

解析　圓心在 $3x-2y-2=0$ 和 $x+y-2=0$ 上 $\Rightarrow\begin{cases}3x-2y-2=0\\x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{6}{5}\\y=\frac{4}{5}\end{cases}$

$\therefore$ 圓心 $\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$， 又 $r=\frac{|1-(-5)|}{\sqrt{13}}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$， $\therefore$ 圓方程式為 $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{13}$.

5.從 $x^2+y^2=25$ 上一點 $A(-4,3)$ 作圓的弦 $\overline{AP}$， 當 P 點在此圓上連續變動時，則

(1)以動弦 $\overline{AP}$ 之中點軌距的方程式為____________； (2)過 A 點的切線方程式為____________ .

解答　(1) $(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$;(2) $4x-3y=-25$

解析 (1) $A(-4,3)$，設 $P(5\cos\theta,5\sin\theta)$

設 $\overline{AP}$ 的中點 $M(x,y)$，$\begin{cases} x=\dfrac{-4+5\cos\theta}{2} \\ y=\dfrac{3+5\sin\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta=\dfrac{2x+4}{5} \\ \sin\theta=\dfrac{2y-3}{5} \end{cases}$

又 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \Rightarrow \left(\dfrac{2x+4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{2y-3}{5}\right)^2=1$

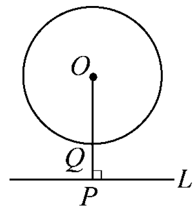
$\Rightarrow (2x+4)^2+(2y-3)^2=25 \Rightarrow (x+2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

(2)$\because A(-4,3)$ 在圓上，由切點公式 $\Rightarrow (-4)\cdot x+3\cdot y=25 \Rightarrow 4x-3y=-25$.

6.點 P 在直線 L： $3x-4y+14=0$ 上，點 Q 在圓 C： $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 上，則 $\overline{PQ}$ 的最小值爲 ________ .

解答 3

解析



圓 C： $(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$， $O(1,-2)$， $r=2$，

L： $3x-4y+14=0 \Rightarrow d(O,L)=\dfrac{|3+8+14|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5>r$，

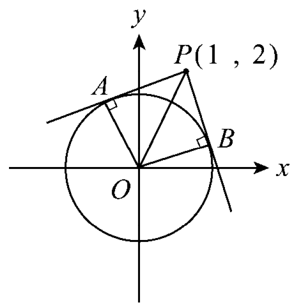
$\therefore$所求最小値爲 $d(O,L)-r=5-2=3$.

7.自圓 $x^2+y^2=2$ 外一點 $P(1,2)$ 作圓的兩條切線，切點爲 A、B，求

(1)直線 AB 的方程式爲________；(2)設 O 爲圓心，則四邊形 $PAOB$ 的面積爲________ .

解答 (1) $x+2y-2=0$;(2) $\sqrt{6}$

解析



(1)由切點公式 $\Rightarrow x\cdot 1+y\cdot 2=2$， $\therefore \overleftrightarrow{AB}$： $x+2y-2=0$.

(2)由右圖知 $\overline{PO}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$， $\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{2}$，

$\therefore \overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{\overline{PO}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{3}$，故 $PAOB$ 面積爲 $2\cdot\triangle PBO$ 爲 $2\cdot\dfrac{\overline{OB}\cdot\overline{PB}}{2}=\sqrt{6}$.

8.點 $P(4,6)$，圓 C： $x^2+y^2-2x-4y-4=0$，過 P 作圓的切線，切點爲 A、B，求

(1)切線段長爲________；(2) $\triangle PAB$ 外接圓方程式爲________ .

解答 (1)4;(2) $x^2+y^2-5x-8y+16=0$

解析 (1)切線段長爲 $\sqrt{4^2+6^2-2\cdot 4-4\cdot 6-4}=4$.

(2)圓心 O 爲 $(1,2)$，$\because$所求圓以 $\overline{OP}$ 爲直徑，

$\therefore$外接圓爲 $(x-1)(x-4)+(y-2)(y-6)=0 \Rightarrow x^2+y^2-5x-8y+16=0$.

9.圓C： $x^2+y^2-2x+2y+k=0$與直線L： $x+y=5$不相交時，k的範圍爲____________.

$\boxed{\text{解答}}$ $-\frac{21}{2}<k<2$

$\boxed{\text{解析}}$ (1)C： $(x-1)^2+(y+1)^2=2-k$爲一圓$\Rightarrow k<2$，圓心O爲$(1,-1)$，

(2)與$x+y=5$不相交$\Rightarrow d>r$， $\frac{|1-1-5|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2-k}\Rightarrow\frac{25}{2}>2-k\Rightarrow k>-\frac{21}{2}$，

由(1)(2)知$-\frac{21}{2}<k<2$.

10.求直線L： $4x+3y-21=0$被圓C： $x^2+y^2-10x+16y-55=0$所截出的線段長爲____________.

$\boxed{\text{解答}}$ $2\sqrt{119}$

$\boxed{\text{解析}}$ 圓C： $(x-5)^2+(y+8)^2=55+25+64=144\Rightarrow$圓心$(5,-8)$， $r=12$，

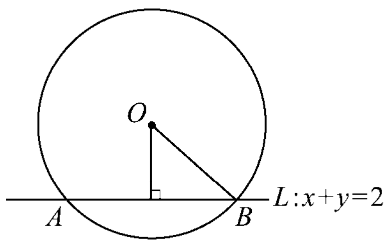
$d=\frac{|20-24-21|}{5}=5$， $\therefore$所求爲$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{12^2-5^2}=2\sqrt{119}$.

11.已知坐標平面上一點$P(4,1)$,圓C： $x^2+y^2+2x+4y-20=0$,則P到圓C的切線段長________.

$\boxed{\text{解答}}$ 3

$\boxed{\text{解析}}$ 所求爲$\sqrt{16+1+8+4-20}=\sqrt{9}=3$.

12.直線L： $x+y=2$被圓C： $x^2+y^2=20$所截弦長爲____________.



$\boxed{\text{解答}}$ $6\sqrt{2}$

$\boxed{\text{解析}}$ 如右圖，設圓心爲O，

$d(O,L)=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow\overline{AB}=2\sqrt{\left(\sqrt{20}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=6\sqrt{2}$.

13.設斜率 2，且與圓C： $x^2+y^2=1$相切的直線方程式爲____________.

$\boxed{\text{解答}}$ $2x-y\pm\sqrt{5}=0$

$\boxed{\text{解析}}$ SOL 一：設切線$2x-y+k=0$， $\because$相切， $\therefore d=\frac{|k|}{\sqrt{5}}=1=r\Rightarrow k=\pm\sqrt{5}$，

$\therefore$切線方程式爲$2x-y\pm\sqrt{5}=0$.

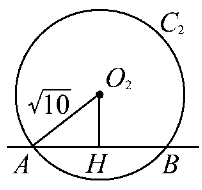
SOL 二： $m=2\Rightarrow y-0=2(x-0)\pm1\cdot\sqrt{2^2+1}\Rightarrow 2x-y\pm\sqrt{5}=0$

14.平面上兩圓C_1： $x^2+y^2-2x-2y-2=0$， C_2： $x^2+y^2-10=0$，兩圓相交於A、B兩點，求
(1)直線AB的方程式：____________；(2) $\overline{AB}=$ ____________.

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $x+y-4=0$;(2) $2\sqrt{2}$

$\boxed{\text{解析}}$

(1) $\overleftrightarrow{AB}$： $C_1-C_2=0\Rightarrow-2x-2y+8=0\Rightarrow x+y-4=0$.



(2)設圓C_2的圓心為O_2， $d\left(O_2,\overleftrightarrow{AB}\right)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$， $\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{10-8}=2\sqrt{2}$.

15.過P作圓C： $x^2+y^2=9$兩切線，分別切圓C於A、B，已知$\overleftrightarrow{AB}$方程式為$2x-y=3$，則P的坐標為____________ .

解答　$(6,-3)$

解析　設$P(a,b)$，利用切點公式得$\overleftrightarrow{AB}$： $ax+by=9$與$2x-y=3$，同義(重合)

$\therefore \dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{9}{3}\Rightarrow a=6$， $b=-3$， $\therefore P$點坐標$(a,b)=(6,-3)$.

16.若圓$x^2+y^2+ax+by+14=0$與直線$x-2y=3c$相切於$(5,1)$,則數對(a,b,c)之值為____________ .

解答　$(-6,-10,1)$

解析　$(5,1)$代入$x-2y=3c\Rightarrow 5-2=3c\Rightarrow c=1$,

利用切線公式過$(5,1)$的切線為$5x+y+a\cdot\dfrac{1}{2}(5+x)+b\cdot\dfrac{1}{2}(1+y)+14=0$

$\Rightarrow(10+a)x+(2+b)y+(5a+b+28)=0$與$x-2y-3=0$同義(重合),

$\therefore \dfrac{10+a}{1}=\dfrac{2+b}{-2}=\dfrac{5a+b+28}{-3}\Rightarrow -20-2a=2+b\Rightarrow 2a+b=-22\cdots\cdots$①

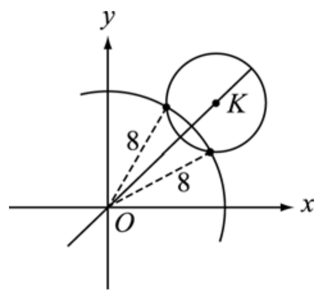
$-6-3b=-10a-2b-56\Rightarrow 10a-b=-50\cdots\cdots$②

解①②得$a=-6$， $b=-10$， $\therefore$數對$(a,b,c)=(-6,-10,1)$.

17.坐標平面上的圓$C:(x-7)^2+(y-8)^2=9$上有____________個點與原點的距離正好是整數值 .

解答　12

解析　設P為圓C上任一點，O為圓點，



因$C:(x-7)^2+(y-8)^2=9$的圓心為$K(7,8)$， 半徑$r=3$,

所以$\overline{OP}$的最大值為$\overline{OK}+r=\sqrt{7^2+8^2}+3=\sqrt{113}+3=13.\cdots$,

最小值為$\overline{OK}-r=\sqrt{7^2+8^2}-3=\sqrt{113}-3=7.\cdots$,

因此若$\overline{OP}$為整數值，則$\overline{OP}=8$， 9，10，11，12，13，

若以O為圓心，分別以 8，9，10，11，12，13 為半徑畫弧，與圓C共交於 12 個點 . 因此所求的P點共有 12 個 .

18.自$A(-3,3)$作圓C： $x^2+y^2-2x-8=0$的兩條切線，設切點為P、Q，則

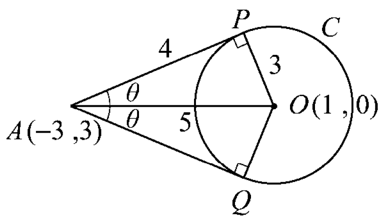
(1)切線的斜率為____________;

(2)設△APQ之外接圓方程式為$x^2+y^2+ax+by+c=0$，則數對$(a,b,c)=$____________;

(3)$\sin\angle PAQ=$____________;

(4)以 A 為圓心，且與圓 C 相切的圓中，最大的半徑為＿＿＿＿＿＿＿.

解答 (1) 0 或 $-\dfrac{24}{7}$;(2) $(2,-3,-3)$;(3) $\dfrac{24}{25}$;(4) 8



解析

(1)設切線 $y-3=m(x+3) \Rightarrow mx-y+3m+3=0$，

圓 C： $(x-1)^2+y^2=9$，圓心 $(1,0)$， $r=3$，

$\because$ 相切， $\therefore d=r \quad \Rightarrow d=\dfrac{|m+3m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3 \Rightarrow |4m+3|^2=\left(3\sqrt{m^2+1}\right)^2$

$\Rightarrow 16m^2+24m+9=9\left(m^2+1\right) \Rightarrow 7m^2+24m=0 \quad \Rightarrow 7m\left(m+\dfrac{24}{7}\right)=0 \Rightarrow m=0$ 或 $-\dfrac{24}{7}$.

(2)即以 $\overline{AO}$ 為直徑，圓心 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$， $r=\dfrac{1}{2}\overline{AO}=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore$ 圓： $(x+1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2+2x-3y-3=0$，數對 $(a,b,c)=(2,-3,-3)$.

(3) $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$， $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$， $\therefore \sin\angle PAQ=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$.

(4)最大半徑 $=\overline{OA}+r=5+3=8$.

19.已知圓 C 通過 C_1： $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 L： $2x-y+4=0$ 的交點且過點 $B(-2,1)$，則圓 C 的方程式為＿＿＿＿＿＿＿.

解答 $x^2+y^2-2x-2y-7=0$

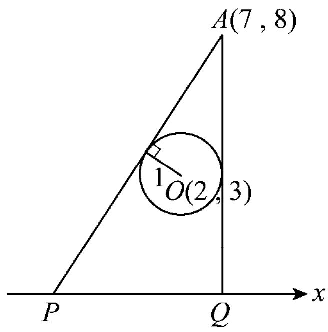
解析 設圓 C： $\left(x^2+y^2+2x-4y+1\right)+k(2x-y+4)=0$，

過 $B(-2,1) \Rightarrow -2+k\cdot(-1)=0 \Rightarrow k=-2$，

$\therefore$ 所求 $=\left(x^2+y^2+2x-4y+1\right)-2(2x-y+4)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-7=0$.

20.在坐標平面上 $A(7,8)$ 有一光源，將圓 C： $x^2+y^2-4x-6y+12=0$ 投射到 x 軸的影長為何?

解答 $\dfrac{14}{3}$



解析 設切線 L： $y-8=m(x-7) \Rightarrow mx-y-7m+8=0$，

圓心 $O\ (2,3)$，半徑 $r=1$，

$\because$ 相切， $\therefore d(O,L)=r \Rightarrow \dfrac{|-5m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow 25m^2-50m+25=m^2+1 \Rightarrow 24m^2-50m+24=0$

$\Rightarrow 12m^2-25m+12=0 \Rightarrow (3m-4)(4m-3)=0$，

$\therefore m=\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{3}{4}$， $\therefore$ 切線 L： $4x-3y=4$ 或 $3x-4y=-11$，

$y=0 \Rightarrow$ 交 x 軸於 $P(1,0)$， $Q\left(-\frac{11}{3},0\right)$，故影長爲 $\overline{PQ}=\frac{14}{3}$ ．

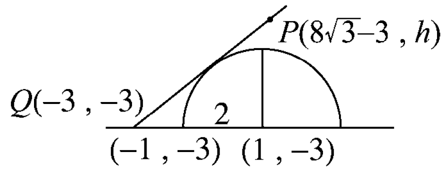
21.有一彎曲之障礙物其形狀爲滿足參數式 $\begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=-3+2\sin\theta \end{cases}$ （ $0\le\theta\le\pi$ ）的圖形，若自 $P\left(8\sqrt{3}-3,h\right)$ （ $h>0$ ）有一光源，如果光線要照到 $Q(-3,-3)$，則 h 的最小值爲____________．

解答 5

解析

參數式 $\begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=-3+2\sin\theta \end{cases}$ （ $0\le\theta\le\pi$ ）的圖形圓： $(x-1)^2+(y+3)^2=4$，

表圓心 $(1,-3)$， $r=2$ 的上半圓，



設切線 $\overleftrightarrow{PQ}$： $y+3=m(x+3) \Rightarrow mx-y+3m-3=0$，

$\because$ 相切，$\therefore d=\frac{|m+3+3m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=2=r$

$\Rightarrow |2m|^2=\left(\sqrt{m^2+1}\right)^2 \Rightarrow m^2=\frac{1}{3} \Rightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，取 $m_{\overline{PQ}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h+3}{8\sqrt{3}} \Rightarrow h+3=8$，$\therefore h=5$ ．

22.已知圓 C： $x^2+y^2-2x+3y+1=0$，過 $P(2,3)$ 作圓的割線交圓於 A、B 兩點，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=$______．

解答 19

解析 切割線性質： $\overline{PA}\times\overline{PB}=(\text{切線長})^2=2^2+3^2-2\times2+3\times3+1=19$ ．

23.設有一圓其圓心在第一象限，且此圓與 $3y=4x$ 及 x 軸兩直線皆相切．已知在 x 軸上的切點爲 $(9,0)$，則(1)此圓的圓心爲____________；(2)此圓與直線 $3y=4x$ 的切點爲____________．

解答 (1) $\left(9,\frac{9}{2}\right)$;(2) $\left(\frac{27}{5},\frac{36}{5}\right)$

解析 $\because$ 與 x 軸相切於 $(9,0)$，$\therefore$ 設圓心爲 $(9,r)$，，

又切 $4x-3y=0$，$\therefore r=\frac{|36-3r|}{5} \Rightarrow r=\frac{9}{2}$，$\therefore$ 圓心爲 $\left(9,\frac{9}{2}\right)$，

$\therefore$ 過圓心垂直 $4x-3y=0$ 的直線爲 $3x+4y=45$，

$\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 3x+4y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{27}{5} \\ y=\frac{36}{5} \end{cases}$ $\therefore$ 切點爲 $\left(\frac{27}{5},\frac{36}{5}\right)$ ．

24.設 x、y 爲實數且滿足 $x^2+(y-1)^2=1$，則 $|3x-4y|$ 的最大值爲____________．

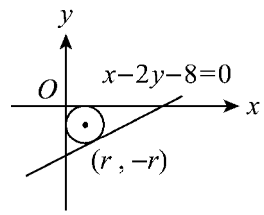
解答 9

解析 設 $3x-4y=k \Rightarrow 3x-4y-k=0$ 有最大值時 $\Rightarrow$ 相切，

$\therefore d=\frac{|0-4-k|}{5}=1=r \Rightarrow |k+4|=5 \Rightarrow k+4=\pm5 \Rightarrow k=1$ 或 -9，

$\therefore |3x-4y|$ 的最大值爲 $|-9|=9$ ．

25.三直線： x 軸， y 軸， $x-2y-8=0$ 所圍成三角形之內切圓的圓心坐標爲____________ .



解答 $\left(6-2\sqrt{5},-6+2\sqrt{5}\right)$

解析 設圓心 $(r,-r)$ ， $\because d=\frac{|r+2r-8|}{\sqrt{5}}=r\Rightarrow|3r-8|^2=\left(\sqrt{5}r\right)^2=5r^2$

$\Rightarrow r^2-12r+16=0\Rightarrow(r-6)^2=-16+36=20$

$\Rightarrow r-6=\pm2\sqrt{5}$ ，取 $r=6-2\sqrt{5}$ ， $\therefore$ 圓心坐標爲 $\left(6-2\sqrt{5},-6+2\sqrt{5}\right)$.

26.已知 $A(2,3)$ ， $B(3,-1)$ 兩點及圓 C ： $(x+2)^2+y^2=25$ ，則

(1)過點 A 與圓 C 相切的直線方程式爲____________；
(2)過點 B 與圓 C 相切的直線方程式爲____________ .（有兩解）

解答 (1) $4x+3y=17$;(2) $y+1=\frac{12}{5}(x-3)$ 或 $x=3$

解析 (1) $A(2,3)$ 在圓 C ： $(x+2)^2+y^2=25$ 上，

由切線公式， $(2+2)(x+2)+3\cdot y=25\Rightarrow 4x+3y=17$.

(2)點 B 在圓 C 外， 設 L ： $y+1=m(x-3)\Rightarrow mx-y-3m-1=0$ ，

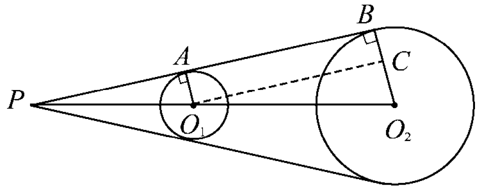
$\because$ 與圓 C 相切， $\therefore d=\frac{|-2m-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=5=r\quad\Rightarrow|5m+1|^2=\left(5\sqrt{m^2+1}\right)^2$

$\Rightarrow 25m^2+10m+1=25\left(m^2+1\right)\Rightarrow 10m=24\Rightarrow m=\frac{12}{5}$,

$\therefore$ 兩切線爲 $y+1=\frac{12}{5}(x-3)$ 或 $x=3$（鉛直線）.

27.設圓 C_1 ： $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ，圓 C_2 ： $(x-4)^2+(y-5)^2=4$ ，求

(1)兩圓外公切線的交點坐標爲____________；
(2)若兩外公切線的夾角爲 θ ，則 $\sin\theta=$____________ .



解答 (1) $(-2,-3)$;(2) $\frac{4\sqrt{6}}{25}$

解析

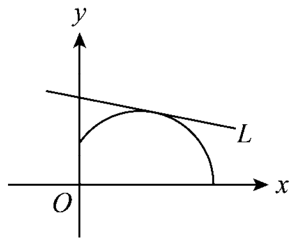
(1)設外公切線交點 $P(x,y)$ ，切點分別是 A 、 B ， $\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_2B}}=\frac{1}{2}=\frac{\overline{PO_1}}{\overline{PO_2}}$,

$\therefore O_1$ 爲 $\overline{PO_2}$ 之中點， $\therefore P(-2,-3)$.

(2) $\triangle O_1CO_2$ 中， $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$,

$\therefore\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}=2\times\frac{1}{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

28.曲線 $y=\sqrt{x\left(4-x\right)}$ 與直線 L： $3x+4y+k=0$ 相切，則 $k=$＿＿＿＿＿＿＿＿ .



解答　-16

解析

$y=\sqrt{x\left(4-x\right)}$ ，平方 $\Rightarrow y^2=x\left(4-x\right)$ ， $y\geq 0\Rightarrow x^2+y^2-4x=0$ ，

$\therefore$曲線是圓心為 $A\left(2,0\right)$ ，半徑為 2 ，位在第一象限的部分圓，

又$\because$相切，$\therefore d(A,L)=r\Rightarrow \dfrac{\left|6+k\right|}{5}=2\Rightarrow k=4$ 或 -16 ，

$\because L$ 與部分圓相切，$\therefore L$ 之 y 截距為正，$\therefore$取 $k=-16$.