高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.12.30					
範圍	3-1.3 圓.球方程式	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.已知方程式 $ax^2+bxy+3y^2+3x-9y+f=0$ 的圖形是一個圓，其中 f 是整數，並取其最大值，則 (1)數對 $(a,b)=$____________； (2) $f=$____________ .

解答 (1) $(3,0)$;(2)7

解析 (1)方程式的圖形是一圓， x^2 項的係數與 y^2 項的係數相等，

且 xy 項之係數為 0，$\therefore$數對 $(a,b)=(3,0)$.

(2) $3x^2+3y^2+3x-9y+f=0 \Rightarrow 3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{2}-f$,

圖形表一圓 $\Rightarrow \frac{15}{2}-f>0$ ， $f<\frac{15}{2}$ ， f 是整數，取 f 之最大值為 7 .

2.過 $(5,1)$ ， $(3,1)$ 兩點且圓心在 $x+2y-2=0$ 線上的圓方程式可表為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ ，則數對 $(d,e,f)=$____ .

解答 $(-8,2,12)$

解析 圓心在 $x+2y-2=0$ 線上 $\Rightarrow$ 設圓心 $C(2-2t,t)$ ，

圓過 $A(5,1),B(3,1) \Rightarrow \overline{CA}=\overline{CB}$ ， $(2-2t-5)^2+(t-1)^2=(2-2t-3)^2+(t-1)^2$

$t=-1 \Rightarrow$ 圓心 $(4,-1)$ ，半徑 $r=\overline{CA}=\sqrt{(5-4)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$,

圓方程式為 $(x-4)^2+(y+1)^2=5 \Rightarrow x^2+y^2-8x+2y+12=0$ $\therefore (d,e,f)=(-8,2,12)$.

3.求過三點 $A(0,0)$ ， $B(4,0)$ ， $C(2,4)$ 的圓方程式____________ .

解答 $x^2+y^2-4x-3y=0$

解析 設圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$,

過 $A(0,0) \Rightarrow f=0$,

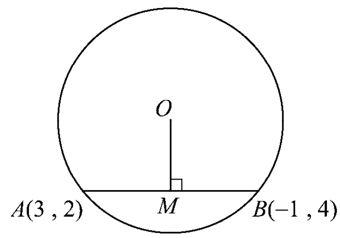
$B(4,0) \Rightarrow 16+4d+f=0 \Rightarrow d=-4$,

$C(2,4) \Rightarrow 20+2d+4e+f=0 \Rightarrow e=-3$,

$\therefore$所求為 $x^2+y^2-4x-3y=0$.

4.已知圓過點 $A(3,2)$ ， $B(-1,4)$ 且弦心距為 $\sqrt{5}$ ，則此圓方程式為____________ .

解答 $x^2+(y-1)^2=10$ 或 $(x-2)^2+(y-5)^2=10$



解析 設 M 為 A 、 B 的中點， C 為圓心， r 為半徑，

M $(1,3)$ ，又 $\overrightarrow{AB}=(-4,2)=2(-2,1) \Rightarrow C(1+t,3+2t)$,

又 $\overline{CM}=\sqrt{5} \Rightarrow \overline{CM}^2=5 \Rightarrow (t)^2+(2t)^2=5 \Rightarrow 5t^2=5$ ， $\therefore t=\pm 1$,

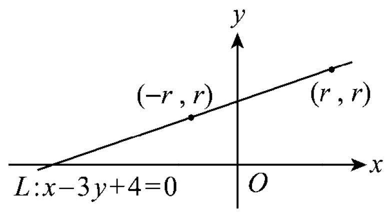
當 $t=1 \Rightarrow C(2,5)$， $r^2=\overline{OA}^2=10$， $C:(x-2)^2+(y-5)^2=10$，

當 $t=-1 \Rightarrow C(0,1)$， $r^2=\overline{OA}^2=10$， $\therefore C:x^2+(y-1)^2=10$.

$\therefore$ 方程式為 $x^2+(y-1)^2=10$ 或 $(x-2)^2+(y-5)^2=10$.

5.圓心在直線 $L:x-3y+4=0$ 上，且與兩坐標軸相切之圓方程式為____________．（有兩解）

解答 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$



解析 設圓心 (r,r) 或 $(-r,r)$，

①(r,r) 代入 $x-3y+4=0 \Rightarrow r-3r+4=0 \Rightarrow r=2$

$\therefore$ 圓方程式為 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$，

②$(-r,r)$ 代入 $x-3y+4=0 \Rightarrow -r-3r+4=0 \Rightarrow r=1$

$\therefore$ 圓方程式為 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，

由①②得 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

6.求符合下列條件之圓方程式：

(1)圓心在 $x+2y=3$ 上且過 $(5,1)$， $(3,1)$ 之圓方程式為____________；

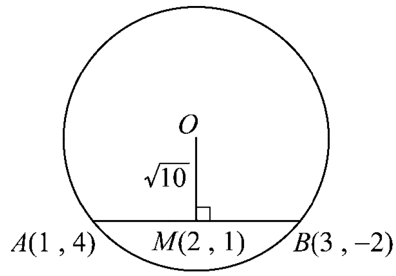
(2)過點 $A(1,4)$， $B(3,-2)$ 且 $\overline{AB}$ 之弦心距為 $\sqrt{10}$ 之圓方程式為____________ .

解答 (1) $(x-4)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$；(2) $(x+1)^2+y^2=20$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$

解析 (1)圓心在 $x+2y=3$ 上，$\therefore$ 設圓心為 $(3-2t,t)$

$\Rightarrow \sqrt{(2t+2)^2+(1-t)^2}=\sqrt{4t^2+(1-t)^2} \Rightarrow 8t+4=0$， $\therefore t=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ 圓心為 $\left(4,-\frac{1}{2}\right)$， $\therefore$ 半徑 $=\sqrt{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{4}}$，



故圓為 $(x-4)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$.

(2)設 M 為 A、B 中點，O 為圓心，r 為半徑，

$M(2,1)$， $m_{AB}=-3$， $\therefore m_{OM}=\frac{1}{3}$， $\therefore \overleftrightarrow{OM}:y-1=\frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow x-3y+1=0$，

$\therefore$ 設圓心 O 為 $(3t-1,t)$， $\because \overline{OM}=\sqrt{10}$， $\therefore \sqrt{(3t-3)^2+(t-1)^2}=\sqrt{10} \Rightarrow (t-1)^2=1$，

$\therefore t-1=\pm1 \Rightarrow t=0$ 或 2，$\therefore$ 圓心為 $(-1,0)$ 或 $(5,2)$， 而 $r=\overline{OA}=\sqrt{20}$，

故圓為 $(x+1)^2+y^2=20$ 或 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$.

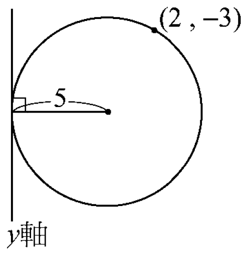
7.設圓C的圓心在$(-2,-3)$且與另一圓$C':(x-1)^2+(y-1)^2=1$內切，求圓C的方程式為__________ .

解答 $(x+2)^2+(y+3)^2=36$

解析 圓C半徑$r=\sqrt{3^2+4^2}+1=5+1=6$，$\therefore$圓C方程式為$(x+2)^2+(y+3)^2=36$.

8.有一圓通過點$P(2,-3)$且與y軸相切，若此圓的半徑為 5，試求此圓的方程式為____________.（有兩解）

解答 $(x-5)^2+(y-1)^2=25$或$(x-5)^2+(y+7)^2=25$



解析 設圓心$(5,k)$，$\because$過$(2,-3)$，則$\sqrt{3^2+(k+3)^2}=5\Rightarrow 9+(k+3)^2=25$

$\Rightarrow (k+3)^2=16\Rightarrow k+3=\pm 4\Rightarrow k=1$或$-7$，又$r=5$

$\therefore$所求為$(x-5)^2+(y-1)^2=25$或$(x-5)^2+(y+7)^2=25$.

9.若m為實數，方程式$x^2+y^2+2(m+2)x-2(m+3)y+3m^2+2=0$表一圓，則最大圓半徑=_______ .

解答 6

解析 $x^2+y^2+2(m+2)x-2(m+3)y+3m^2+2=0$

$\Rightarrow [x+(m+2)]^2+[y-(m+3)]^2=(m+2)^2+(m+3)^2-3m^2-2$，

$r=\sqrt{(m+2)^2+(m+3)^2-3m^2-2}=\sqrt{-m^2+10m+11}=\sqrt{-(m-5)^2+36}$，

$\therefore$最大圓半徑$r=6$.

10.設x、y為實數且滿足$x^2+y^2=4$，則

(1) $4x-3y+2$的最大值為____________；(2) $x\cdot y$的最小值為 ____________ .

解答 (1)12;(2)-2

解析 (1)令$x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$代入$4x-3y+2=8\cos\theta-6\sin\theta+2$，

$\therefore$最大值為$\sqrt{8^2+6^2}+2=12$.

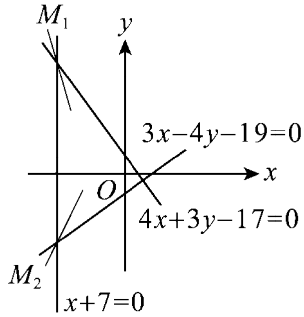
(2) $x\cdot y=2\cos\theta\cdot 2\sin\theta=2\sin 2\theta\geq 2\times(-1)=-2$.

11.坐標平面上，三直線$L_1:3x-4y-19=0$，$L_2:4x+3y-17=0$，$L_3:x+7=0$圍成一個三角形，求

(1)三角形的外接圓方程式為____________；

(2)三角形的內心的坐標為____________；

(3)三角形的內切圓方程式為____________ .



解答 (1) $x^2+y^2+14x-5y-101=0$;(2)$(-2,0)$;(3)$(x+2)^2+y^2=25$

解析 (1) L_1，L_2交於$A(5,-1)$，L_2，L_3交於$B(-7,15)$，

L_1，L_3交於$C(-7,-10)$，

設圓$C:x^2+y^2+dx+ey+f=0$，A、B、C三點代入圓C

$$\Rightarrow \begin{cases} 25+1+5d-e+f=0\cdots\cdots① \\ 49+225-7d+15e+f=0\cdots\cdots② \\ 49+100-7d-10e+f=0\cdots\cdots③ \end{cases}$$

②$-$③$\Rightarrow 125+25e=0$， $\therefore e=-5$，

①–② $\Rightarrow -248+12d-16e=0$，　$\therefore d=14$，代回①得 $f=-101$，

$\therefore C: x^2+y^2+14x-5y-101=0$ ．

(2) $M_1: \dfrac{x+7}{\sqrt{1+0}}=-\dfrac{4x+3y-17}{\sqrt{16+9}}$ (異號區)$\Rightarrow 3x+y+6=0$，

$M_2: \dfrac{x+7}{\sqrt{1+0}}=-\dfrac{3x-4y-19}{\sqrt{9+16}}$ (異號區)$\Rightarrow 2x-y+4=0$，

$\therefore I: \begin{cases} 3x+y+6=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow I(-2,0)$ ．

(3) $r=d(I,L_3)=5$，$\therefore$內切圓方程式為$(x+2)^2+y^2=25$ ．

12.用三角函數寫出半個圓方程式 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的參數式及 θ 的範圍限制為____________．

解答　$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$， $0\le\theta\le\pi$

解析　$y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2+y^2=4$ ，又 $y\ge 0$ ，圖形為上半圓$\Rightarrow \begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$， $0\le\theta\le\pi$ ．

13.自 $P(1,-2)$ 作圓 $C: x^2+y^2+6x-2y+6=0$ 的二切線，分別切圓 C 於 A、B 兩點．則$\triangle PAB$之外接圓的方程式為____________．

解答　$x^2+y^2+2x+y-5=0$

解析　$x^2+y^2+6x-2y+6=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow$圓心 $O(-3,1)$，

$\triangle PAB$之外接圓即四邊形 $PAOB$ 之外接圓，即以 $\overline{PO}$ 為直徑之圓，

利用直徑式$(x-1)(x+3)+(y+2)(y-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+y-5=0$ ．

14.若點 $P(k-4,k-2)$ 在圓 $C: x^2+y^2+kx-4y+5=0$ 的外部，求 k 的範圍為____________．

解答　$k<-2$ 或 $2<k<3$ 或 $k>\dfrac{11}{3}$

解析　圓 C 存在$\Leftrightarrow k^2+(-4)^2-4\times 5>0$，$\therefore k^2>4$，故 $k>2$ 或 $k<-2\cdots\cdots$①

$\because P$ 在圓 C 外部，$\therefore (k-4)^2+(k-2)^2+k(k-4)-4(k-2)+5>0$

$\Rightarrow 3k^2-20k+33>0 \Rightarrow (3k-11)(k-3)>0 \Rightarrow k>\dfrac{11}{3}$ 或 $k<3\cdots\cdots$②

由①②得 $k<-2$ 或 $2<k<3$ 或 $k>\dfrac{11}{3}$ ．

15.空間坐標系中，S 是以 $A(2,-1,3)$、$B(3,1,1)$ 為直徑兩端點的球面，若 S 之方程式為 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，則實數序組 $(d,e,f,g)=$____________．

解答　$(-5,0,-4,8)$

解析　利用直徑式

$$S:(x-2)(x-3)+(y+1)(y-1)+(z-3)(z-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-5x-4z+8=0$$

$$\therefore (d,e,f,g)=(-5,0,-4,8)$$

16. $A(1,-3,1)$、$B(1,3,4)$、$P(x,y,z)$，求 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$ 的 P 點軌跡方程式____________．

解答　$x^2+y^2+z^2-2x+10y+6=0$

解析　$\because \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore 4\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

$$\Rightarrow 4\left[(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2\right]=(x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2$$

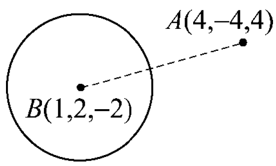
$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-6x+30y+18=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x+10y+6=0$$

17.試求空間中一點 $(4,-4,4)$ 到球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+2y-2z)$ 的最短距離為____________．

解答　6

解析　球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+2y-2z)$

整理得 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9 \Rightarrow$ 球心 $B(1,2,-2)$，半徑 3



又 $A(4,-4,4)$ $\because \overline{AB}=\sqrt{3^2+(-6)^2+6^2}=9>3$　$\therefore A$ 在球面的外部

故點 $A(4,-4,4)$ 到球面的最短距離為 $\overline{AB}-3=6$

18.設三元二次方程式 $x^2+y^2+z^2-2mx+4my-2z+6m^2-3m+3=0$ 的圖形是一個球面，求
(1)實數 m 的範圍為____________；(2)當 $m=$____時，此球面的半徑為最大，又最大半徑為______．

解答　(1) $1<m<2$；(2) $\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$

解析　(1)利用配方得　$(x-m)^2+(y+2m)^2+(z-1)^2=m^2+4m^2+1-(6m^2-3m+3)$

$$=-m^2+3m-2=-(m-1)(m-2)$$

因其圖形是一個球面　故 $-(m-1)(m-2)>0$　$\Rightarrow (m-1)(m-2)<0$　$\therefore 1<m<2$

(2)球之半徑 $r=\sqrt{-(m^2-3m+2)}=\sqrt{-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}$

當 $m=\dfrac{3}{2}$ 時，半徑 r 有最大值為 $\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

19.求通過 $A(4,1,6)$、$B(3,5,-3)$、$C(-2,-3,-6)$ 與 $D(7,2,2)$ 四點的球面方程式，並求其
(1)球心為____________；(2)半徑為____________．

解答 (1)$\left(1,-1,0\right)$;(2)7

解析 設所求為 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

$A\left(4,1,6\right)$ 代入得 $16+1+36+4d+e+6f+g=0\cdots\cdots$ ①

$B\left(3,5,-3\right)$ 代入得 $9+25+9+3d+5e-3f+g=0\cdots\cdots$ ②

$C\left(-2,-3,-6\right)$ 代入得 $4+9+36-2d-3e-6f+g=0\cdots\cdots$ ③

$D\left(7,2,2\right)$ 代入得 $49+4+4+7d+2e+2f+g=0\cdots\cdots$ ④

解①②③④得　$d=-2$，$e=2$，$f=0$，$g=-47$

$\therefore x^2+y^2+z^2-2x+2y-47=0\Rightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2+z^2=49$ $\therefore$球心$\left(1,-1,0\right)$，半徑$=7$