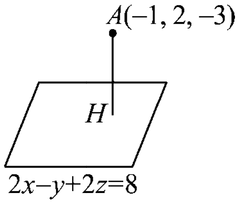
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.11.25					
範圍	2-5 直線方程式	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. 點 $A(-1,2,-3)$ 在平面 $2x-y+2z=8$ 上的投影點坐標為____________ .



解答 $(3,0,1)$

解析 $\overleftrightarrow{AH}:\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\\z=-3+2t\end{cases}$ ，t 為實數，$\therefore H(-1+2t,2-t,-3+2t)$ 代入平面，

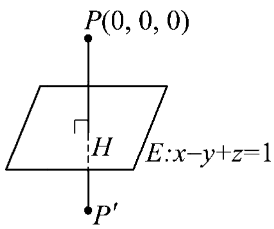
得 $-2+4t-2+t-6+4t=8\Rightarrow 9t=18$ ，$\therefore t=2$ ，$\therefore H(3,0,1)$.

2. $L:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ ，$E:x-2y+3z-8=0$ ，求直線 L 與平面 E 交點坐標____________ .

解答 $(-7,0,5)$

解析 $L:\begin{cases}x=2t-3\\y=t+2\\z=-2t+1\end{cases}$ ，t 為實數，代入 $E\Rightarrow 2t-3-2t-4-6t+3-8=0\Rightarrow t=-2$ ，$\therefore$ 交點 $(-7,0,5)$.

3. 已知平面 $E:x-y+z=1$ ，求原點關於平面 E 的對稱點坐標為____________ .



解答 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

解析 $\overleftrightarrow{PH}:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=t\end{cases}$ ，t 為實數，代入 $E\Rightarrow t-(-t)+t=1\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$ ，$\therefore H\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ ，

又 H 為 $\overline{PP'}$ 之中點，$\therefore P'\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

4. 兩平面 $E_1:2x-y+3z-4=0$ ，$E_2:x+4y-2z+7=0$ 的交線為 $\dfrac{x-a}{c}=\dfrac{y-b}{d}=\dfrac{z}{-9}$ ，則數對 $(b,c)=$_ .

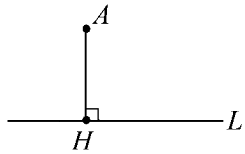
解答 $(-2,10)$

解析 $\overrightarrow{V_L}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=(2,-1,3)\times(1,4,-2)=(-10,7,9)=-(10,-7,-9)\Rightarrow c=10$ ，$d=-7$.

令 $z=0\Rightarrow\begin{cases}2x-y-4=0\\x+4y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}\Rightarrow a=1$ ，$b=-2$ ，$(b,c)=(-2,10)$.

5. 已知 $A(-1,-2,-1)$ 與直線 $L:x=t$ ，$y=2t-3$ ，$z=-2t+3$ ，t 為實數

(1) A 到直線 L 的距離＝____________；(2) A 在直線 L 上的投影點為____________.



解答 (1)3;(2) $(1,-1,1)$

解析

設 $H(t,2t-3,-2t+3)$ ，

$\overline{AH}=\sqrt{(t+1)^2+(2t-1)^2+(-2t+4)^2}=\sqrt{9t^2-18t+18}=\sqrt{9(t-1)^2+9}$ ，

$\therefore t=1$ 時，$d(A,L)=\sqrt{9}=3$. $\Rightarrow H(1,-1,1)$.

6. 求直線 $L:\begin{cases}\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}\\ y=-2\end{cases}$ 與 x 軸銳夾角的餘弦值____________ .

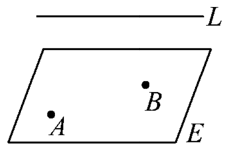
解答 $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

解析 $\overrightarrow{V_L}=(-2,0,3)$， x 軸方向向量 $=(1,0,0)$ $\therefore \cos\theta=\dfrac{|(-2,0,3)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{13}\cdot 1}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

7. 試求通過 $A(3,-1,2)$，$B(1,4,-3)$ 兩點且與直線 $L:\begin{cases}x=3-2t\\ y=-t\\ z=1+t\end{cases}$，$t$ 為實數，平行的平面方程式為____ .

解答 $y+z=1$

解析



$\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{V_L}$ 且 $\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{AB}$， $\therefore$ $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_L}\times\overrightarrow{AB}=(-2,-1,1)\times(-2,5,-5)$ $=(0,-12,-12)=-12(0,1,1)$，

$\therefore E: y+z=1$.

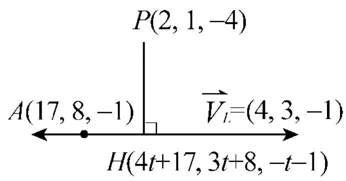
8. 點 $P(2,1,-4)$，直線 $L:\dfrac{x-17}{4}=\dfrac{y-8}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$

(1)求點 P 到直線 L 的距離 $=$____________；

(2)包含點 P 及直線 L 的平面方程式為____________ .

解答 (1)7;(2)$16x-27y-17z=73$

解析



(1)如圖，令 $H(4t+17,3t+8,-t-1)$，

$\overrightarrow{PH}=(4t+15,3t+7,-t+3)$，

$\because \overline{PH}\perp L$， $\therefore \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{V_L}=0\Rightarrow 4(4t+15)+3(3t+7)-1(-t+3)=0\Rightarrow t=-3\Rightarrow H(5,-1,2)$

$\therefore$距離 $=\overline{PH}=\sqrt{9+4+36}=7$.

(2) $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{V_L}=(15,7,3)\times(4,3,-1)$ $=(-16,27,17)=-(16,-27,-17)$，

設 $E:16x-27y-17z=k$，$P(2,1,-4)$ 代入 $\Rightarrow k=32-27+68=73$，$E:16x-27y-17z=73$.

9. 設兩直線 $L_1:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{a}$， a 為實數， $L_2: x+1=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{2}$ 相交於一點 P，

(1) $a=$____________； (2)包含 L_1 與 L_2 之平面方程式為____________ .

解答 (1) -3 ;(2) $x-y+z=4$

解析 (1)由 L_2 令 $P(t-1,3t-3,2t+2)$ 代入 L_1， $\dfrac{t-6}{2}=\dfrac{3t-4}{-1}=\dfrac{2t+2}{a}$，

$6t-8=-t+6$， $7t=14\Rightarrow t=2\Rightarrow P(1,3,6)$， $\therefore \dfrac{-4}{2}=\dfrac{6}{a}\Rightarrow -4a=12\Rightarrow a=-3$.

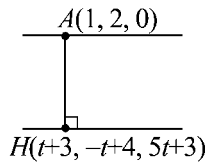
(2) $\overrightarrow{u_1}=(2,-1,-3)$， $\overrightarrow{u_2}=(1,3,2)$，

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}=\left(\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)=(7,-7,7)=7(1,-1,1),$$

令 $E: x-y+z=k$， $P(1,3,6)$ 代入： $1-3+6=k=4$， $\therefore x-y+z=4$.

10. 空間中兩直線 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{5}$， $L_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{5}$，

(1) L_1 與 L_2 的距離為__________；(2) L_1 與 L_2 決定的平面方程式：__________ .

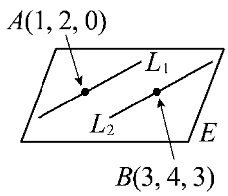


解答 (1) $\frac{\sqrt{78}}{3}$;(2) $13x-7y-4z+1=0$

解析 (1)如右圖，令垂足 $H(t+3,-t+4,5t+3)$，

$$\overline{AH}=\sqrt{(t+2)^2+(-t+2)^2+(5t+3)^2}=\sqrt{27t^2+30t+17}=\sqrt{27\left(t+\frac{5}{9}\right)^2+\frac{26}{3}}$$

$$\therefore d(L_1,L_2)=\sqrt{\frac{26}{3}}=\frac{\sqrt{78}}{3}\ .$$



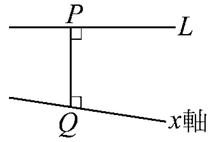
(2) $\because \overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{V_1}$ 且 $\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{AB}$，

$$\therefore \overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{AB}=(1,-1,5)\times(2,2,3)=(-13,7,4)=-(13,-7,-4)$$

$\therefore E: 13x-7y-4z+1=0$.

8. 點 P 在直線 $L:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-2t\end{cases}$，（ t 為實數）上，點 Q 在 x 軸上，則

(1) $\overline{PQ}$ 之最小值為__________，(2)此時 P 之坐標為__________ .



解答 (1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$;(2) $\left(\frac{7}{5},\frac{-4}{5},\frac{-2}{5}\right)$

解析 設 $P(2t+1,t-1,-2t)$，則 $Q(2t+1,0,0)$，

$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{0+(t-1)^2+(-2t)^2}=\sqrt{5t^2-2t+1}=\sqrt{5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}},$$

$\therefore t=\frac{1}{5}$ 時， $\overline{PQ}$ 之最小值 $=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，而 $P\left(\frac{7}{5},\frac{-4}{5},\frac{-2}{5}\right)$.

11. 李探長為了找尋槍手的可能發射位置，他設定一空間坐標，先從 $(0,0,2)$ 朝向 $(5,8,3)$ 發射一固定雷射光束，接著又從點 $(0,7,a)$ 沿平行於 x 軸方向發射另一雷射光束，試問當 a 為和值時，兩雷射光束會相交？答：__________。

解答 $\frac{23}{8}$

解析 令 $A(0,0,2)$， $B(5,8,3)$， $\overrightarrow{AB}=(5,8,1)$，

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ 參數式為 $L_1:\begin{cases}x=0+5t\\y=0+8t\\z=2+t\end{cases}$，$t$ 為實數，令 $C(0,7,a)$，$\therefore x$ 軸方向向量為 $(1,0,0)$，

$\therefore$過 C 且平行 x 軸的直線為 $L_2:\begin{cases}x=0+t'\\y=7\\z=a\end{cases}$，$t'$ 為實數

$\because$二光束相交$\therefore\begin{cases}x=5t=t'\\y=8t=7\\z=2+t=a\end{cases}$，得 $t=\frac{7}{8}$，$a=2+t=2+\frac{7}{8}=\frac{23}{8}$．

12.一平面過點 $(2,-1,1)$ 且與直線 $\begin{cases}3x+y+z-1=0\\x-2y+z+1=0\end{cases}$ 垂直，則此平面的方程式為____________．

解答 $3x-2y-7z=1$

解析 $\overrightarrow{N}=(3,1,1)\times(1,-2,1)=(3,-2,-7)$　　$\therefore$平面方程式為：$3x-2y-7z=1$．

13.設 $A(1,1,1)$，直線 $L:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$，

(1)一平面過 A 點且垂直直線 L，求此平面方程式為____________；

(2)一直線過 A 點且平行直線 L，求此直線之對稱比例式為____________；

(3)求 A 點至直線 L 之距離為____________；

(4)一直線過 A 點且垂直直線 L，求此直線的對稱比例式為____________．

解答 (1) $2x+y-2z=1$;(2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$;(3)1;(4) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$

解析 (1) $\overrightarrow{N}=(2,1,-2)$，$\therefore$所求平面：$2x+y-2z=1$．

(2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$．

(3)設 L 上的點 $H(-1+2t,1+t,2-2t)$，

$$\overline{AH}=\sqrt{(-2+2t)^2+t^2+(1-2t)^2}=\sqrt{9t^2-12t+5}=\sqrt{9\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+1},$$

當 $t=\frac{2}{3}$，得 A 到直線 L 的距離為 1．

(4) $t=\frac{2}{3}$ 代入得 $H\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)//(-2,2,-1)$

$\therefore$所求為 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$．

14.設 $A(3,2,1)$，$B(-1,2,5)$，若點 Q 位於直線 $L:\begin{cases}x-y+z=2\\x-3y-z=4\end{cases}$ 之上且點 Q 到 A，B 兩點等距離，試求 Q 點坐標為____________．

解答 $(-1,-2,1)$

解析 (1)令 $y=0\Rightarrow L$ 上定點 $(3,0,-1)$，

又 $\overrightarrow{V}=(1,-1,1)\times(1,-3,-1)=(4,2,-2)=2(2,1,-1)$， $\therefore$設 $Q(3+2t,t,-1-t)$.

(2) $\because \overline{QA}=\overline{QB}$， $\therefore \overline{QA}^2=\overline{QB}^2$

$\Rightarrow (2t)^2+(t-2)^2+(-t-2)^2=(2t+4)^2+(t-2)^2+(-t-6)^2 \Rightarrow t=-2$， $\therefore Q(-1,-2,1)$.

15.空間中直線 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ 及兩點 $A(5,1,3)$， $B(1,-5,1)$，已知點 C 在 L 上，滿足 $\overline{AC}\perp\overline{BC}$，且 x， y， z 坐標皆為整數，求 C 的坐標____________ .

解答 $(2,0,-1)$

解析 設 $C(2t+6,-t-2,t+1)$，

$\overrightarrow{AC}=(2t+1,-t-3,t-2)$， $\overrightarrow{BC}=(2t+5,-t+3,t)$，

$\because \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$， $\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow(2t+1)(2t+5)+(-t-3)(-t+3)+(t-2)(t)=0$

$\Rightarrow 0=3t^2+5t-2=(3t-1)(t+2)\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$ 或 -2，

$\because x$， y， z 皆為整數， $\therefore t=-2$， $\therefore C(2,0,-1)$.

16.設 L 為通過 $(0,0,1)$ 與 $(2,-3,5)$ 兩點的直線

(1) x 軸與 L 之公垂線的方向向量為____________；

(2) x 軸與 L 之距離為____________；

(3) x 軸上距離 L 最近之點坐標為____________ .

解答 (1) $(0,4,3)$；(2) $\dfrac{3}{5}$；(3) $\left(\dfrac{-8}{25},0,0\right)$

解析 (1) $\overrightarrow{u}=(2,-3,4)$， x 軸： $(1,0,0)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{u_1}=\left(\begin{vmatrix}-3&4\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&2\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-3\\1&0\end{vmatrix}\right)=(0,4,3)$

(2)設包含 L 且與 x 軸平行之平面為 $E_1:4y+3z=k$， 又過 $(0,0,1)\Rightarrow 4y+3z=3$，

$\therefore d=\dfrac{3}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{3}{5}$.

(3)令 $P(0+2k,0-3k,1+4k)$， $Q(t,0,0)$， $\overrightarrow{PQ}=(t-2k,3k,-4k-1)//(0,4,3)$，

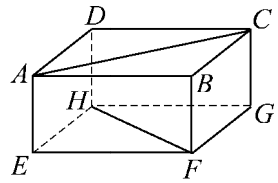
$\therefore t-2k=0$， $\dfrac{3k}{4}=\dfrac{-4k-1}{3}$， $\therefore 9k=-16k-4\Rightarrow 25k=-4$， $k=\dfrac{-4}{25}$， $t=\dfrac{-8}{25}$，

$Q\left(\dfrac{-8}{25},0,0\right)$.

17.如圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中，已知 $\overleftrightarrow{AC}:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+5}{1}$， $\overleftrightarrow{HF}:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-2}{-3}$，且

$A(3,-3,-5)$，求：(1)兩直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 與 $\overleftrightarrow{HF}$ 的距離＿＿＿＿＿＿；

(2)長方體的體積＿＿＿＿＿＿．



解答 (1)3;(2)$\dfrac{1080\sqrt{26}}{13}$

解析 (1)設 $\overleftrightarrow{AC}$ 上點 $P(-2t+3,2t-3,t-5)$， $\overleftrightarrow{HF}$ 上點 $Q(s,4s-2,-3s+2)$， s， t 為實數

$\overleftrightarrow{PQ}$ 為公垂線 $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(s+2t-3,4s-2t+1,-3s-t+7)$，

又 $\overrightarrow{V_{AC}}=(-2,2,1)$， $\overrightarrow{V_{HF}}=(1,4,-3)$，

$$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{V_{AC}}=3s-9t+15=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{V_{HF}}=26s-3t-20=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=1\\ t=2\end{cases}\Rightarrow P(-1,1,-3)，\ Q(1,2,-1)$$

$\therefore$兩直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 與 $\overleftrightarrow{HF}$ 的距離 $\overline{PQ}=\sqrt{4+1+4}=3$ ．

(2)$\because P$ 為 $\overline{AC}$ 中點，$\therefore \overline{AC}=2\overline{AP}=2\sqrt{16+16+4}=12$，

又 $\overleftrightarrow{AC}$， $\overleftrightarrow{BD}$ 的夾角和 $\overleftrightarrow{AC}$， $\overleftrightarrow{HF}$ 的夾角相等，

設夾角 $\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{V_{AC}}\cdot\overrightarrow{V_{HF}}}{\left|\overrightarrow{V_{AC}}\right|\left|\overrightarrow{V_{HF}}\right|}=\dfrac{\pm(-2+8-3)}{(3)(\sqrt{26})}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$，

$\therefore ABCD$ 面積$=\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\theta=12\cdot12\cdot\dfrac{5}{\sqrt{26}}=\dfrac{720}{\sqrt{26}}$，

$\therefore$體積$=\dfrac{720}{\sqrt{26}}\cdot3=\dfrac{2160}{\sqrt{26}}=\dfrac{1080\sqrt{26}}{13}$ ．

18.已知兩直線 $L_1:\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+7}{-6}=\dfrac{z-1}{-2}$ 與 $L_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+5}{2}$， P_1， P_2 分別為 L_1， L_2 上之點，且 $\overline{P_1P_2}\perp L_1$， $\overline{P_1P_2}\perp L_2$，求(1) P_1 坐標為＿＿＿＿＿；(2) P_2 坐標為＿＿＿＿＿；(3) $\overline{P_1P_2}$ 長＝＿＿＿＿＿．

解答 (1) $P_1(2,-1,3)$;(2) $P_2(4,2,-3)$;(3) $\overline{P_1P_2}=7$

解析 設 $P_1(3t+5,-6t-7,-2t+1)$， $P_2(3r+1,2r,2r-5)$， t， r 為實數

$\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=(3r-3t-4,2r+6t+7,2r+2t-6)$ ．

$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{V_2}=(3,-6,-2)\times(3,2,2)=(-8,-12,24)=-4(2,3,-6)$，

$\because \overrightarrow{V}\,//\,\overrightarrow{P_1P_2}$，$\therefore \dfrac{3r-3t-4}{2}=\dfrac{2r+6t+7}{3}=\dfrac{2r+2t-6}{-6}$

$$\Rightarrow\begin{cases}9r-9t-12=4r+12t+14\\ 2r+6t+7=-(r+t-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5r-21t=26\\ 3r+7t=-4\end{cases}\Rightarrow r=1，\ t=-1，$$

$\therefore$(1) $P_1(2,-1,3)$. (2) $P_2(4,2,-3)$. (3) $\overline{P_1P_2}=\sqrt{4+9+36}=7$.

19.設直線 $L:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$

(1)若直線 L 與 x 軸的銳交角 θ，則 $\cos\theta=$______________；

(2)若直線 N_1 // 直線 N_2，L 是 N_1 與 N_2 的一條公垂線，且公垂線段 $\overline{AB}=10$，則 $\overrightarrow{AB}=$______________；

(3)若點 $P(2,-15,-16)$ 在直線 L 上的投影點為 Q，則點 Q 坐標為______________ .

解答 (1)$\dfrac{1}{3}$;(2)$\pm\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{20}{3},\dfrac{20}{3}\right)$;(3)$(-4,-14,-14)$

解析 (1) $\overrightarrow{V_L}=(1,2,2)$， $\overrightarrow{e}=(1,0,0)$，　$\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{V_L}\cdot\overrightarrow{e}\right|}{\left|\overrightarrow{V_L}\right|\left|\overrightarrow{e}\right|}=\dfrac{1}{3\cdot1}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\overrightarrow{AB}=\dfrac{\pm(1,2,2)}{3}\cdot10=\pm\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{20}{3},\dfrac{20}{3}\right)$.

(3)設 $Q(t+3,2t,2t)$ ，$\overrightarrow{PQ}=(t+1,2t+15,2t+16)$，

$\because\overrightarrow{PQ}\perp L$，$\therefore\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{V_L}=0$　$\Rightarrow(t+1)+2(2t+15)+2(2t+16)=0\Rightarrow t=-7$，

$\therefore Q(-4,-14,-14)$.

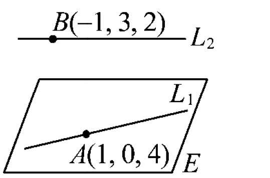
20.二歪斜線： $L_1:x-1=y=4-z$， $L_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-5}$，求

(1)包含 L_1 且與 L_2 平行之平面 E 之方程式______________；

(2) L_1 與 L_2 之公垂線段長為______________ .

解答 (1) $3x-2y+z=7$;(2)$\sqrt{14}$

解析



(1) $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{V_2}=(1,1,-1)\times(3,2,-5)=(-3,2,-1)=-(3,-2,1)$，

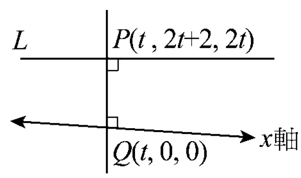
$\therefore E:3x-2y+z=3-0+4$ 即 $3x-2y+z=7$.

(2) $d(L_1,L_2)=d(B,E)=\dfrac{|-3-6+2-7|}{\sqrt{14}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$.

21.已知直線 $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$

(1)求直線 L 與 x 軸的公垂線方程式為______________；

(2)求直線 L 關於平面 $x=y$ 的對稱直線方程式為______________ .



解答 (1)$\dfrac{-1}{2},\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$;(2)$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$

解析

(1)設 L 上之點 $P(t,2t+2,2t)$

$\because \overleftrightarrow{PQ}$ 為公垂線，$\therefore$ 對 x 軸之投影點 $Q(t,0,0)$，

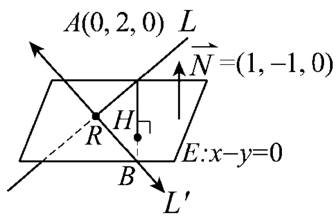
$\overline{PQ}=\sqrt{0+(2t+2)^2+(2t)^2}=\sqrt{8t^2+8t+4}$

$=\sqrt{8\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+2}$，當 $t=\frac{-1}{2}$ 時，$\overleftrightarrow{PQ}$ 為公垂線，

$P\left(\frac{-1}{2},1,-1\right)$，$Q\left(\frac{-1}{2},0,0\right)\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(0,-1,1)$，$\quad\therefore \overleftrightarrow{PQ}: x=\frac{-1}{2}$，$\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

(2)①設 $R(t,2t+2,2t)$，代入 $x-y=0\ \Rightarrow t-(2t+2)=0\Rightarrow t=-2$，$\quad\therefore R(-2,-2,-4)$.

②又 L 上找一點 $A(0,2,0)$，$\quad\overleftrightarrow{AH}:\begin{cases}x=0+t\\ y=2-t\\ z=0+0t\end{cases}$，$t$ 為實數，



代入 $x-y=0\Rightarrow t-(2-t)=0\Rightarrow t=1$，

$\therefore H(1,1,0)$ 為 A 對 E 之投影點，$\therefore$ 對稱點 $B(2,0,0)$，

$\therefore \overrightarrow{BR}=(-4,-2,-4)=-2(2,1,2)$，$\qquad\therefore$ 所求 $\overleftrightarrow{BR}:\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

22.直線 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-2}$ 及 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{6}$ 所夾的銳角平分線方程式為__________ .

解答 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{23}=\frac{z-2}{-32}$

解析 $(1,2,-2)\cdot(2,-3,6)=2-6-12<0$ ……夾鈍角

$\therefore$ 銳角之平分線的方向向量 $=\frac{(1,2,-2)}{3}+\frac{(-2,3,-6)}{7}=\frac{1}{21}(1,23,-32)$

又兩線之交點為 $(0,1,2)$，$\therefore$ 所求：$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{23}=\frac{z-2}{-32}$.

23.已知點 $A(4,1,2)$，$B(-2,3,4)$，平面 $E: x-2y+2z-4=0$

(1)過點 A 且與平面 E 垂直之直線方程式為__________；

(2)點 B 在平面 E 之正射影（投影）坐標為__________；

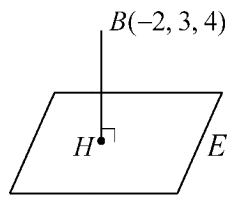
(3)在平面 E 上找一點 P，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小，則 P 點坐標為__________；

(4)過 A，B 兩點，且與平面 E 的銳夾角為 45° 之平面方程式為__________ .

解答 (1) $\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{2}$;(2) $\left(\frac{-14}{9},\frac{19}{9},\frac{44}{9}\right)$;(3) $\left(2,\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$;(4) $7x+y+20z=69$ 或 $x+4y-z=6$

解析

(1) $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{N}=(1,-2,2)$，$\therefore L:\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{2}$.



(2) $\overleftrightarrow{BH}:\begin{cases}x=-2+t\\ y=3-2t\\ z=4+2t\end{cases}$，$t$ 為實數，代入 E

$\Rightarrow -2+t-6+4t+8+4t-4=0 \Rightarrow t=\dfrac{4}{9}$，　$\therefore H\left(\dfrac{-14}{9},\dfrac{19}{9},\dfrac{44}{9}\right)$.

(3)① A 代入 $E \Rightarrow 4-2+4-4>0$，　B 代入 $E \Rightarrow -2-6+8-4<0$，　$\therefore A$，B 在 E 的異側 .

② $\overleftrightarrow{AB}$ 與 E 之交點即為 P，　又 $\overrightarrow{AB}=(-6,2,2)=2(-3,1,1)$，

$\therefore \overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}x=4-3t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}$，代入 E　$\Rightarrow 4-3t-2-2t+4+2t-4=0 \Rightarrow t=\dfrac{2}{3}$，　$\therefore P\left(2,\dfrac{5}{3},\dfrac{8}{3}\right)$.

(4)① $\overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}x=4-3t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}$，$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}x+3y-7=0\\y-z+1=0\end{cases}$

$\therefore$設過 $\overleftrightarrow{AB}$ 之平面 E'　$(x+3y-7)+k(y-z+1)=0 \Rightarrow E':x+(3+k)y-kz-7+k=0$.

②$\because E$ 與 E' 夾 $45°$，　$\therefore \cos 45°=\dfrac{|(1,3+k,-k)\cdot(1,-2,2)|}{\left(\sqrt{2k^2+6k+10}\right)\cdot 3}$　$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|-4k-5|}{\left(\sqrt{2k^2+6k+10}\right)\cdot 3}$

平方：$9(k^2+3k+5)=(-4k-5)^2 \Rightarrow 7k^2+13k-20=0 \Rightarrow (7k+20)(k-1)=0$

$\therefore k=\dfrac{-20}{7}$ 或 1，代回，$\therefore E':x+\dfrac{1}{7}y+\dfrac{20}{7}z-\dfrac{69}{7}=0$ 或 $x+4y-z-6=0$，

即 $7x+y+20z=69$ 或 $x+4y-z=6$.

24.平面 E 過原點 $O(0,0,0)$ 及 $A(1,1,1)$，與平面 $F:x+2y-z-3=0$ 的交角為 θ，若 $|\cos\theta|=\dfrac{1}{6}$，則平面 E 的方程式為__________ .

解答　$13x-11y-2z=0$ 或 $2x-y-z=0$

解析　(1) $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$，$\therefore \overleftrightarrow{OA}:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$，$t$ 為實數，$\Rightarrow \begin{cases}x-y=0\\y-z=0\end{cases}$

$\therefore$可設 $E:(x-y)+k(y-z)=0 \Rightarrow x+(k-1)y-kz=0$.

(2) $|\cos\theta|=\dfrac{\left|\overrightarrow{N_E}\cdot\overrightarrow{N_F}\right|}{\left|\overrightarrow{N_E}\right|\left|\overrightarrow{N_F}\right|}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{|(1,k-1,-k)\cdot(1,2,-1)|}{\left(\sqrt{2k^2-2k+2}\right)\left(\sqrt{6}\right)}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{|3k-1|}{\left(\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{k^2-k+1}\right)}=\dfrac{1}{6}$，

平方：$\dfrac{9k^2-6k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow 27k^2-18k+3=k^2-k+1$

$\Rightarrow 26k^2-17k+2=0 \Rightarrow (13k-2)(2k-1)=0$，　$\therefore k=\dfrac{2}{13}$ 或 $\dfrac{1}{2}$，

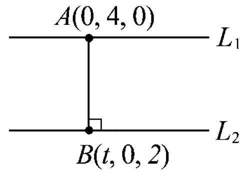
故 $E:x-\dfrac{11}{13}y-\dfrac{2}{13}z=0$ 或 $x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z=0$，　即 $13x-11y-2z=0$ 或 $2x-y-z=0$.

25.已知平面 $E:y+2z=4$，設 L_1 為平面 E 與 xy 平面的交線，L_2 為平面 E 與 xz 平面的交線，可得 L_1，

L_2二直線平行，求此二平行線L_1與L_2的距離＿＿＿＿＿＿＿ .

解答 $2\sqrt{5}$

解析



$L_1:\begin{cases} y+2z=4 \\ z=0 \end{cases}$

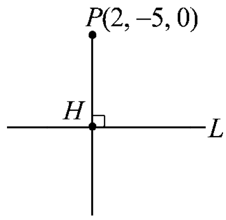
$\overrightarrow{V_{L_1}}=(0,1,2)\times(0,0,1)=(1,0,0)$， $L_2:\begin{cases} y+2z=4 \\ y=0 \end{cases}$

$\overrightarrow{V_{L_2}}=(0,1,2)\times(0,1,0)=(1,0,0)$，

$d(L_1,L_2)=\overline{AB}=\sqrt{t^2+16+4}=\sqrt{t^2+20}$，當$t=0$時，有最小值$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$為所求，

26.已知點$P(2,-5,0)$，直線$L:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=z$，則過$P$且與直線$L$垂直的直線方程式為＿＿＿＿＿ .

（以比例式表示）



解答 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{2}$

解析

$H(2t-1,-2t+1,t)$， $\overrightarrow{PH}=(2t-3,-2t+6,t)$，

$\because \overrightarrow{PH}\perp L$， $\therefore (2t-3,-2t+6,t)\bullet(2,-2,1)=0\Rightarrow 4t-6+4t-12+t=0\Rightarrow 9t=18\Rightarrow t=2$，

$\therefore H(3,-3,2)$， $\overrightarrow{PH}=(1,2,2)$， $\overleftrightarrow{PH}:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{2}$.

27.已知直線$L_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+1}{-5}$，$E:x-3y+2z+4=0$，則包含直線$L$且與平面$E$垂直的平面為＿.

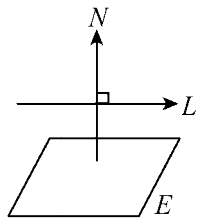
解答 $x+y+z-4=0$

解析 $\overrightarrow{V_{L_1}}=(2,3,-5)$， $\overrightarrow{N_E}=(1,-3,2)$，設所求平面法向量$\overrightarrow{N}$， $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_{L_1}}\times\overrightarrow{N_E}=-9(1,1,1)$，

又平面過$(-1,6,-1)\Rightarrow x+y+z=-1+6-1=4$， $\therefore x+y+z-4=0$.

28.若直線$L:\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$與平面$E:ax-3y+z-5=0$平行，則：

(1) $a=$＿＿＿＿＿＿；(2)直線L到平面E的距離為＿＿＿＿＿＿ .



解答 (1)4;(2)$\dfrac{3\sqrt{26}}{13}$

解析 (1) $\overrightarrow{V_L}=(1,-1,1)\times(2,-1,-1)=(2,3,1)$，

$\because L\,//\,E$， $\therefore \overrightarrow{V_L}\perp\overrightarrow{N_E}$ $\Rightarrow \overrightarrow{V_L}\cdot\overrightarrow{N_E}=(2,3,1)\cdot(a,-3,1)=2a-9+1=0\Rightarrow a=4$.

(2) L 上找一點，令 $z=0$ $\Rightarrow\begin{cases}x-y+1=0\\2x-y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\Rightarrow P(2,3,0)$，

距離 $=d(P,E)=\dfrac{|8-9+0-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{26}}=\dfrac{3\sqrt{26}}{13}$.

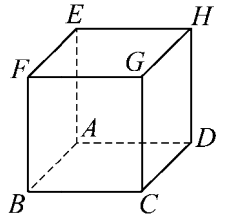
29.如圖正立方體 $ABCD-EFGH$，若 $ABCD$ 所在的平面方程式為 $2x-y+2z+6=0$，且 $E(-7,5,-7)$

(1) $EFGH$ 所在的平面方程式為____________；

(2)正立方體的邊長 = ____________；

(3) A 點坐標為____________；

(4) $\angle HAF=$ ____________ .



解答 (1) $2x-y+2z=-33$;(2)9;(3) $(-1,2,-1)$;(4) $60°$

解析 (1) $2x-y+2z=-33$.

(2)邊長 $=d(E,\text{平面}ABCD)=\dfrac{|-14-5-14+6|}{3}=9$.

(3) $\overleftrightarrow{EA}:\begin{cases}x=-7+2t\\y=5-t\\z=-7+2t\end{cases}$，$t$ 為實數，代入 $2x-y+2z+6=0$

$\Rightarrow -14+4t-5+t-14+4t+6=0\Rightarrow t=3$，$\therefore A(-1,2,-1)$.

(4) $\because \overline{FA}=\overline{AH}=\overline{HF}=9\sqrt{2}$，$\therefore \angle HAF=60°$.

30.空間二點 $A(-1,2,3)$，$B(1,-3,-4)$ 及平面 $E:2x-3y+z-1=0$ 在平面 E 上找一點 P，使 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 最小，求 P 點坐標____________ .

解答 $\left(0,\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{2}\right)$

解析 (1) A 代入 $E\Rightarrow -2-6+3-1<0$，B 代入 $E\Rightarrow 2+9-4-1>0$，$\therefore A$，B 在 E 之異側 .

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ 與 E 之交點即為 P，又 $\overrightarrow{AB}=(2,-5,-7)$，

$\therefore \overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=3-7t\end{cases}$，代入 $E\Rightarrow -2+4t-6+15t+3-7t-1=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$，$\therefore P\left(0,\dfrac{-1}{2},\dfrac{-1}{2}\right)$.