高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.11.18					
範圍	2-4 平面方程式(2)	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. 設三平面 $E_1: x-y+az=1$，$E_2: bx+y+z=4$，$E_3: x+cy+z=2$，若 $E_1\perp E_2$ 且 $E_1 // E_3$，求 a，b，c 的值爲____________．

解答 $a=1, b=0, c=-1$

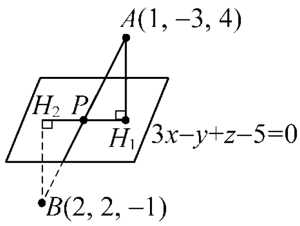
解析 $\overrightarrow{N_1}=(1,-1,a)$，$\overrightarrow{N_2}=(b,1,1)$，$\overrightarrow{N_3}=(1,c,1)$，

$E_1\perp E_2$，$\therefore \overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0\Rightarrow b-1+a=0\cdots\cdots①$，

$E_1 // E_3$，$\therefore \dfrac{1}{1}=\dfrac{-1}{c}=\dfrac{a}{1}\cdots\cdots②$，解①②得 $a=1$，$b=0$，$c=-1$．

2. 空間中二點 $A(1,-3,4)$，$B(2,2,-1)$，若 $\overline{AB}$ 與平面 $3x-y+z=5$ 交於 P，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=$____________．

解答 $\dfrac{5}{2}$



解析

$E: 3x-y+z-5=0$，

$\because E(A): 3+3+4-5>0$，$E(B): 6-2-1-5<0$，異號

$\therefore A$，B 在平面異側，$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AH_1}}{\overline{BH_2}}=\dfrac{\dfrac{|3+3+4-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}}{\dfrac{|6-2-1-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}}=\dfrac{|3+3+4-5|}{|6-2-1-5|}=\dfrac{5}{2}$．

3. 求過點 $A(1,-1,2)$ 與 $B(6,0,-1)$ 且與平面 $2x+2y-z-1=0$ 垂直的平面方程式爲____________．

解答 $5x-y+8z-22=0$

解析 $\overrightarrow{AB}=(5,1,-3)$，已知平面之法向量爲 $\overrightarrow{N_1}=(2,2,-1)$，

設所求平面之法向量爲 $\overrightarrow{N}\Rightarrow \overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{N_1}$，取 $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{N_1}=(5,-1,8)$，

所求爲 $5(x-1)-(y+1)+8(z-2)=0\Rightarrow 5x-y+8z-22=0$．

4. 一平面 $2x+y-3z=6$ 交 x 軸於 A，y 軸於 B，求 $\overline{AB}$ 之垂直平分面方程式____________．

解答 $2x-4y+9=0$

解析 令 $y=z=0$，$x=3$，$A(3,0,0)$，

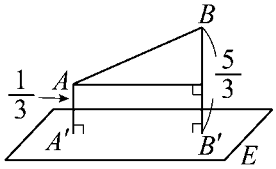
$z=x=0$，$y=6$，$B(0,6,0)$，

$\overline{AB}$ 中點 $\left(\dfrac{3}{2},3,0\right)$，$\overrightarrow{BA}=(3,-6,0)$，取 $\overrightarrow{N}=(3,-6,0)$，

設所求爲 $3(x-\dfrac{3}{2})-6(y-3)=0\Rightarrow 3x-6y+\dfrac{27}{2}=0\Rightarrow 2x-4y+9=0$．

5. 設 $A(1,0,1)$，$B(2,2,3)$，則 $\overline{AB}$ 在平面 $E: 2x-y-2z-1=0$ 的正射影之長爲____________．

解答 $\dfrac{\sqrt{65}}{3}$



解析

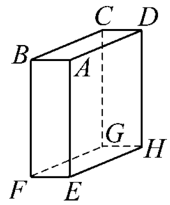
(1) A 代入 $E(A):2-0-2-1=-1$， B 代入 $E(B):4-2-6-1=-5$，同號

$\therefore A$， B 在平面 E 同側．

(2) $d(A,E)=\dfrac{1}{3}$， $d(B,E)=\dfrac{5}{3}$， $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$， $\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{65}{9}}=\dfrac{\sqrt{65}}{3}$ ．

6. 如圖，一長方體 $ABCD-EFGH$ ， $\overline{AB}=1$， $\overline{AD}=2$， $\overline{AE}=3$，求

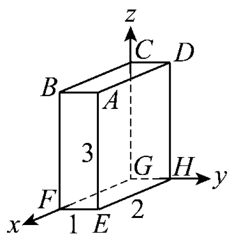
(1)△ BDE 的面積爲____________；(2) A 點至△ BDE 所在平面的距離____________．



解答 $\dfrac{6}{7}$

解析

建立坐標系：則 $A(2,1,3)$， $B(2,0,3)$， $D(0,1,3)$， $E(2,1,0)$，



$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}=(-2,1,0)\times(0,1,-3)=-(3,6,2)$，

平面方程式： $3(x-2)+6(y-0)+2(z-3)=0\Rightarrow 3x+6y+2z-12=0$，

$\therefore d=\dfrac{|6+6+6-12|}{7}=\dfrac{6}{7}$ ．

7. 已知平面 E 通過 $A(a,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,-1)$ 且與平面 $y-2z=3$ 的一夾角爲 $60°$,則 $a=$____.

解答 $\pm\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$

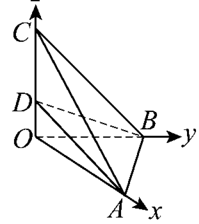
解析 設 $E:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-1}=1\Rightarrow 2x+ay-2az=2a\Rightarrow \overrightarrow{N_1}=(2,a,-2a)$,

$y-2z=3\Rightarrow\overrightarrow{N_2}=(0,1,-2)$,

$\therefore \cos 60°=\dfrac{\pm(a+4a)}{\left(\sqrt{5a^2+4}\right)\left(\sqrt{5}\right)}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore a^2=\dfrac{4}{15}\Rightarrow a=\pm\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ ．

8. 如圖示空間坐標中 O 爲原點，點 A， B， C 分別位於 x 軸， y 軸， z 軸之正向上且 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，又 D 在 $\overline{OC}$ 上滿足 $\overline{OD}:\overline{DC}=1:3$，求原點 O 到平面 ABC 與到平面 ABD 之距離比=____________．

解答 $\sqrt{6}:1$



解析 設 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$， $\overline{OD}:\overline{DC}=1:3\Rightarrow D\left(0,0,\dfrac{1}{4}\right)$

平面 $ABC:\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{1}=1\Rightarrow x+y+z=1$,

平面 $ABD: x+y+\frac{z}{\frac{1}{4}}=1 \Rightarrow x+y+4z=1$，

$\therefore$所求 $=\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{18}}=\sqrt{6}:1$.

9.求過點$(1,2,2)$且與二平面 $x-y+z=1$， $2x+y-z=2$ 均垂直的平面方程式爲____________ .

解答 $y+z-4=0$

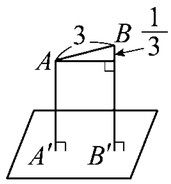
解析 $\overrightarrow{N_1}=(1,-1,1)$， $\overrightarrow{N_2}=(2,1,-1)$， $\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=(0,3,3)$

所求爲 $0(x-1)+3(y-2)+3(z-2)=0 \Rightarrow y+z-4=0$.

10.已知 $A(1,1,0)$， $B(0,-1,-2)$，平面 $E: x-2y+2z=5$， $\overline{AB}$ 在平面 E 上的正射影長____________ .

解答 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

解析



(1) A， B 代入平面均小於零，$\therefore A$， B 在 E 之同側 .

(2) $d(A,E)=\frac{|1-2+0-5|}{3}=2$， $d(B,E)=\frac{|0+2-4-5|}{3}=\frac{7}{3}$，

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{80}{9}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

11.自原點作平面 E 之垂線，其垂足點爲 $P(-1,2,-3)$，則平面 E 之方程式爲____________ .

解答 $x-2y+3z+14=0$

解析 取 $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{OP}=(-1,2,-3)$， $E:(-1)(x+1)+2(y-2)-3(z+3)=0$，即 $x-2y+3z+14=0$.

12.已知空間中三點 $A(1,0,0)$， $B(1,1,1)$， $C(0,0,1)$，試回答下列各題：

(1)設包含 A， B， C 三點的平面爲 E，則平面 E 的方程式爲____________；

(2)設點 $P(x,y,z)$ 在平面 E 上，則 $x^2+2y^2+3z^2$ 的最小值爲____________；

(3)求平面 E 與 xy 平面的夾角之正弦值爲____________ .

解答 (1) $x-y+z=1$;(2) $\frac{6}{11}$;(3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(0,1,1)$， $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$， $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-1,1)$，

$\therefore E:(x-1)-(y-0)+(z-0)=0 \Rightarrow x-y+z=1$.

(2)利用柯西不等式：

$$(x-y+z)^2 \le \left[x^2+\left(\sqrt{2}y\right)^2+\left(\sqrt{3}z\right)^2\right]\left[1^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow 1 \le \left(x^2+2y^2+3z^2\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x^2+2y^2+3z^2 \ge \frac{1}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{11}$$，$\therefore$最小值爲$\dfrac{6}{11}$．

(3) $\overrightarrow{N_E}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{N_{xy}}=(0,0,1)$，$\cos\theta=\pm\dfrac{(1,-1,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{3}\cdot 1}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

13.設$x+ky+z-2=0$與$x+\sqrt{2}y-z+1=0$之夾角爲$\dfrac{\pi}{3}$，求k的值爲____________．

解答 $\pm\sqrt{2}$

解析 $\overrightarrow{N_1}=(1,k,1)$，$\overrightarrow{N_2}=\left(1,\sqrt{2},-1\right)$；

$$\cos\frac{\pi}{3}=\pm\frac{1+\sqrt{2}k-1}{\left(\sqrt{k^2+2}\right)(2)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \pm\sqrt{2}k=\sqrt{k^2+2}\Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$$．

14.試求兩平面$E_1: x-y+z-3=0$，$E_2: x+y+\sqrt{6}z+2=0$的夾角爲____________．

解答 60°或120°

解析 $\overrightarrow{N_1}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{N_2}=\left(1,1,\sqrt{6}\right)$，$\cos\theta=\pm\dfrac{(1,-1,1)\cdot\left(1,1,\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}\right)}=\pm\dfrac{1}{2}$ $\therefore \theta=60^\circ$或$120^\circ$．

15.點$A(-3,5,3)$到平面$E: 8x-14y-4z+37=0$的距離爲____________．

解答 $\dfrac{\sqrt{69}}{2}$

解析 $d(A,E)=\dfrac{|-24-70-12+37|}{\sqrt{64+196+16}}=\dfrac{69}{\sqrt{276}}=\dfrac{69}{2\sqrt{69}}=\dfrac{\sqrt{69}}{2}$．

16.二平面$2x+3y-6z+3=0$，$4x+6y-12z-1=0$的距離爲____________．

解答 $\dfrac{1}{2}$

解析 $E_1: 2x+3y-6z+3=0$，$E_2: 2x+3y-6z-\dfrac{1}{2}=0$，$\therefore d(E_1,E_2)=\dfrac{\left|3+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{4+9+36}}=\dfrac{\frac{7}{2}}{7}=\dfrac{1}{2}$．

17. $A(1,2,-4)$，$B(-3,4,-2)$爲空間中對稱於平面$ax+by+cz=8$的兩點，則序組$(a,b,c)=$__________．

解答 $(-8,4,4)$

解析 即求A，B的垂直平分面，$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}=(-4,2,2)=-2(2,-1,-1)$，又$A$，$B$中點$(-1,3,-3)$，

該平面：$2(x+1)-(y-3)-(z+3)=0\Rightarrow -8x+4y+4z=8$，$\therefore (a,b,c)=(-8,4,4)$．

18.設x，y，z皆爲實數，已知$x-2y-z=6$，求$\sqrt{(x-6)^2+(y+3)^2+(z+6)^2}$的最小值爲__________．

解答 $2\sqrt{6}$

解析

SOL 一；由柯西不等式知：

$$[(x-6)-2(y+3)-(z+6)]^2 \le \left[(x-6)^2+(y+3)^2+(z+6)^2\right]\left[1^2+(-2)^2+(-1)^2\right]$$

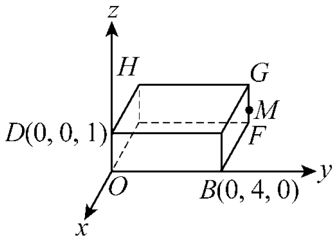
$(x-2y-z-18)^2=(6-18)^2=144$，

$\therefore (x-6)^2+(y+3)^2+(z+6)^2 \ge \dfrac{144}{6}=24$，所求最小值$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

SOL 二：即求點$(6,-3,-6)$到平面$x-2y-z-6=0$的距離：

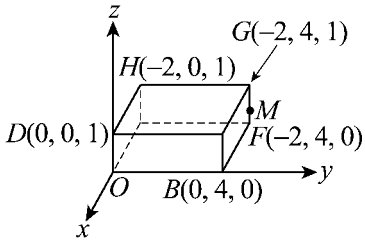
$$d=\frac{|6+6+6-6|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}\ .$$

19.如圖所示的長方體中，M 點在$\overline{FG}$上，且$\overline{FM}=\dfrac{1}{2}\overline{MG}$，$\overline{DH}=2$則通過$H$點且與$\overline{DM}$垂直的平面方程式爲____________ .

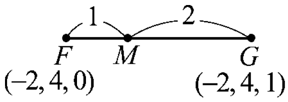


解答 $3x-6y+z+5=0$

解析



圖中$G(-2,4,1)$，$F(-2,4,0)$，



由內分點公式：$M\left(\dfrac{-4-2}{2+1},\dfrac{8+4}{2+1},\dfrac{0+1}{2+1}\right)$，即$M\left(-2,4,\dfrac{1}{3}\right)$，

所求平面與$\overline{DM}$垂直，$\therefore \overrightarrow{DM}=\left(-2,4,\dfrac{-2}{3}\right)$是所求平面之一法向量，

平面過$H(-2,0,1)$，$\therefore E:-2(x+2)+4(y-0)-\dfrac{2}{3}(z-1)=0 \Rightarrow 3x-6y+z+5=0$爲所求 .

20.試求包含x軸，且過$(1,-1,2)$之平面方程式爲____________ .

解答 $2y+z=0$

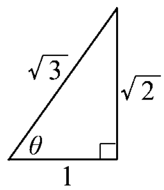
解析 x軸可視爲xy平面($z=0$)與xz平面($y=0$)之交線，$\therefore$所求爲$y+kz=0$，

$(1,-1,2)$代入得$-1+2k=0 \Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$，所求爲$2y+z=0$.

21.設平面包含$O(0,0,0)$，$A(2,0,2)$，$B(0,1,1)$三點且與xy平面之銳夾角爲θ，求$\tan\theta=$__________ .

解答 $\sqrt{2}$

解析



O，A，B三點的平面法向量$\overrightarrow{N}$，

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(-2,-2,2)=-2(1,1,-1)$，取$\overrightarrow{N}=(1,1,-1)$

又xy平面之一法向量$\overrightarrow{N_x}=(0,0,1)$，則$\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N_x}\right|}{\left|\overrightarrow{N}\right|\left|\overrightarrow{N_x}\right|}=\dfrac{1}{(\sqrt{3})(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore \tan\theta=\sqrt{2}$.

22.二平面$E_1:3x+y-z+1=0$，$E_2:x+y+z=0$之交線L，求：

(1)由點$A(1,2,3)$與L所決定之平面E方程式為____________；

(2)包含L且與平面$E_3:2x-y+3z-1=0$垂直的平面F之方程式為____________．

解答 (1) $5x+y-3z+2=0$;(2) $5x+y-3z+2=0$

解析 (1)設所求$E:(3x+y-z+1)+k(x+y+z)=0$，

$A(1,2,3)$代入得$(3+2-3+1)+k(1+2+3)=0\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore E:(3x+y-z+1)-\dfrac{1}{2}(x+y+z)=0\Rightarrow 5x+y-3z+2=0$ ．

(2)設$F:(3x+y-z+1)+t(x+y+z)=0$，$(3+t)x+(1+t)y+(-1+t)z+1=0$，

$\overrightarrow{N}=(3+t,1+t,-1+t)$，$\overrightarrow{N_{E_3}}=(2,-1,3)$，

$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N_{E_3}}=0\Rightarrow 2(3+t)+(-1)(1+t)+3(-1+t)=0$，$t=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore F:(3x+y-z+1)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x+y+z)=0\Rightarrow 5x+y-3z+2=0$ ．

23.空間中，已知平面E通過$(3,0,0)$，$(0,4,0)$及正z軸上一點$(0,0,a)$，若平面E與xy平面的夾角成$45°$，則$a=$____________．

解答 $\dfrac{12}{5}$

解析 設所求E之方程式為$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{a}=1$，$a>0$，

$(4a)x+(3a)y+12z-12a=0$，法向量$\overrightarrow{N_1}=(4a,3a,12)$，

取xy平面之法向量為$\overrightarrow{N_2}=(0,0,1)$，$\cos 45°=\dfrac{\pm\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}=\pm\dfrac{12}{\sqrt{25a^2+144}}$，

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{144}{25a^2+144}\Rightarrow a=\pm\dfrac{12}{5}$（取正），$\therefore a=\dfrac{12}{5}$ ．

24.含二平面$x+y+2z+3=0$，$x+2y-z-2=0$之交線且與平面$3x+2y+z-4=0$垂直之平面方程式為____________．

解答 $x+8y-19z-32=0$

解析 設$E:(x+y+2z+3)+k(x+2y-z-2)=0\Rightarrow\overrightarrow{N}=(1+k,1+2k,2-k)$，

$\because$與$3x+2y+z-4=0$垂直，

$\therefore (1+k,1+2k,2-k)\cdot(3,2,1)=0\Rightarrow 3+3k+2+4k+2-k=0\Rightarrow k=\dfrac{-7}{6}$，

$\therefore E:(x+y+2z+3)-\dfrac{7}{6}(x+2y-z-2)=0$，即$x+8y-19z-32=0$ ．

25.設平面 $E_1: 2x+3y+6z=7$，平面 $E_2: 3x+6y+2z=5$，試求

(1) E_1 與 E_2 夾角之角平分面方程式____________________.

(2) E_1 與 E_2 所夾銳角之角平分面方程式____________________.

解答 (1) $x+3y-4z+2=0$，$5x+9y+8z-12=0$. (2) $5x+9y+8z-12=0$

解析 (1)角平分面：$\dfrac{2x+3y+6z-7}{\sqrt{49}}=\pm\dfrac{3x+6y+2z-5}{\sqrt{49}}$

$\Rightarrow F_1: x+3y-4z+2=0$，$F_2: 5x+9y+8z-12=0$.

(2) E_1 上取一點 $P(2,1,0)$，

$d(P,F_1)=\dfrac{|2+3-0+2|}{\sqrt{26}}=\dfrac{7}{\sqrt{26}}$，　$d(P,F_2)=\dfrac{|10+9+0-12|}{\sqrt{170}}=\dfrac{7}{\sqrt{170}}$，　$\dfrac{7}{\sqrt{26}}>\dfrac{7}{\sqrt{170}}$

$\therefore F_1$ 爲鈍角之角平分面，而銳夾角之角平分面爲 $F_2: 5x+9y+8z-12=0$.

26.設直線 $L:\begin{cases}3x+y-z+1=0\\ x+y+z=0\end{cases}$，平面 $E_1: -2x+y+3z=1$.若平面 E_2 包含直線 L 且 $E_2\perp E_1$，則平面 E_2 的方程式爲____________.

解答 $7x+5y+3z=-1$

解析 設 $E_2: (3x+y-z+1)+k(x+y+z)=0 \Rightarrow E_2: (3+k)x+(1+k)y+(-1+k)z+1=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{N_2}=(3+k,1+k,-1+k)$，

$\because E_2\perp E_1$，$\therefore \overrightarrow{N_2}\perp\overrightarrow{N_1}$，$\therefore \overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{N_1}=0$，又 $\overrightarrow{N_1}=(-2,1,3)$

$\Rightarrow -2(3+k)+(1+k)+3(-1+k)=0 \Rightarrow 2k-8=0 \Rightarrow k=4$，代入 $E_2: 7x+5y+3z=-1$.

27.求與 $x+y+z=1$ 平行，且與 $(3,-5,1)$，$(-1,3,7)$ 等距離的平面方程式爲____________.

解答 $x+y+z-4=0$

解析 設所求爲 $x+y+z+k=0$，必過 $(3,-5,1)$，$(-1,3,7)$ 的中點 $(1,-1,4)$，

$\therefore 1-1+4+k=0 \Rightarrow k=-4$，所求爲 $x+y+z-4=0$.