高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.11.11					
範圍	2-3、4 空間向量(2)、平面方程式(1)	班級 座號	二年____班	姓名	

一、填充題 (每題 10 分)

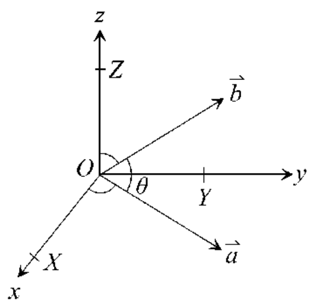
1. 設 X，Y，Z 三點分別爲在空間坐標系中 x 軸，y 軸，z 軸上的點，求 $\angle XOY$ 在 xy 平面上的平分線與 $\angle YOZ$ 在 yz 平面上的平分線之夾角．

解答 $\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

解析 $\angle XOY$ 在 xy 平面上的平分線之一方向向量爲 $\overrightarrow{a}=(1,1,0)$

$\angle YOZ$ 在 yz 平面上的平分線之一方向向量爲 $\overrightarrow{b}=(0,1,1)$

設夾角爲 θ，則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，另一夾角爲$\dfrac{2\pi}{3}$



2. 有一向量 $\overrightarrow{a}$，始點在$(1,-5\sqrt{2},0)$，$|\overrightarrow{a}|=10$，方向角爲$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{2\pi}{3}$，試求其終點坐標．

解答 $(6,0,-5)$

解析 設終點坐標爲(x, y, z), 則 $\overrightarrow{a}=(x-1, y+5\sqrt{2}, z-0)=10(\cos\dfrac{\pi}{3},\cos\dfrac{\pi}{4},\cos\dfrac{2\pi}{3})$

$\therefore$ $x-1=10\cos\dfrac{\pi}{3}=5$ $\Rightarrow$ $x=6$

$y+5\sqrt{2}=10\cos\dfrac{\pi}{4}=5\sqrt{2}$ $\Rightarrow y=0$

$z-0=10\cos\dfrac{2\pi}{3}=-5$ $\Rightarrow$ $z=-5$ 故終點坐標爲$(6,0,-5)$

3. 設$\triangle ABC$ 之三邊長 x，y，z 滿足 $x-2y+z=0$ 及 $3x+y-2z=0$，則$\triangle ABC$ 中之最大角是多少度?

解答 $120°$

解析 $\begin{cases} x-2y+z=0\cdots\cdots① \\ 3x+y-2z=0\cdots\cdots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ①\times 2+② \\ ①+②\times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-3y=0 \\ 7x-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5}{3}x \\ z=\dfrac{7}{3}x \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x:y:z=x:\dfrac{5}{3}x:\dfrac{7}{3}x=3:5:7$

設三邊長爲 $x=3k$，$y=5k$，$z=7k$

則最大角之 $\cos\theta=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2(3k)(5k)}=-\dfrac{1}{2}$，$\theta=120°$ ∴ 最大角爲 120°

4. 空間中有三點 $P(6，-4，4)$，$Q(2，1，2)$，$R(3，-1，4)$，則
(1)△PQR 之面積=? (2)P 點到直線 QR 的最短距離=?

解答 (1)$\dfrac{9}{2}$;(2)3

解析 $\overrightarrow{QP}=(4，-5，2)$，$\overrightarrow{QR}=(1，-2，2)$

(1)$|\overrightarrow{QP}|=\sqrt{16+25+4}=3\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{1+4+4}=3$， $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=4+10+4=18$

∴ △QPR 之面積$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{5})^2\cdot 3^2-18^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{81}=\dfrac{9}{2}$

(2)設 P 到 $\overleftrightarrow{QR}$ 之最短距離$=d$，△QPR 之面積$=\dfrac{1}{2}\cdot d\cdot\overline{QR}\Rightarrow\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot d\Rightarrow d=3$

5. 設△ABC 中，$A(4, 3, 2)$，$B(2, 1, 1)$，$C(5, -2, 4)$，求 B 在 $\overline{AC}$ 邊上的投影坐標.

解答 $(\dfrac{21}{5}, 2, \dfrac{12}{5})$

解析 設 B 在 $\overline{AC}$ 邊的投影爲 K，由 $\overrightarrow{AC}=(1, -5, 2)$，$\overrightarrow{AB}=(-2, -2, -1)$，

得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=30\Rightarrow\overrightarrow{AK}=(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2})\overrightarrow{AC}$；

即 $\overrightarrow{AK}=\dfrac{6}{30}\overrightarrow{AC}=(\dfrac{1}{5},-1,\dfrac{2}{5})$，故 $K:(4,3,2)+(\dfrac{1}{5},-1,\dfrac{2}{5})\Rightarrow K(\dfrac{21}{5}, 2, \dfrac{12}{5})$.

6. 設 $A(4，1，3)$，$B(6，3，4)$，$C(4，5，6)$爲空間中三點，若△ABC 中，$\angle A$ 的分角線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，外角平分線交直線 BC 於 E 點，求 D，E 之坐標 .

解答 $D(\dfrac{21}{4}，\dfrac{15}{4}，\dfrac{19}{4})$，$E(9，0，1)$

解析　$\overline{AB}=\sqrt{(6-4)^2+(3-1)^2+(4-3)^2}=3$，$\overline{AC}=\sqrt{(4-4)^2+(5-1)^2+(6-3)^2}=5$

(1)設 D 點坐標爲(x_1,y_1,z_1)　∵　$\angle A$ 之分角線交 $\overline{BC}$ 於 D　∴　$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{5}$

由分點公式 $x_1=\dfrac{5\times6+3\times4}{3+5}=\dfrac{21}{4}$，$y_1=\dfrac{5\times3+3\times5}{3+5}=\dfrac{15}{4}$，$z_1=\dfrac{5\times4+3\times6}{3+5}=\dfrac{19}{4}$

∴　$D(\dfrac{21}{4}，\dfrac{15}{4}，\dfrac{19}{4})$

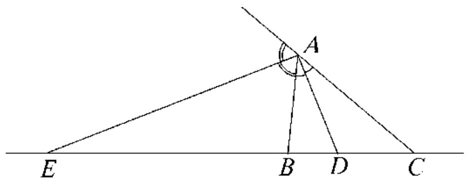
(2)設 E 點坐標爲$(x_2，y_2，z_2)$　∵

E 是 $\angle A$ 之外角平分線與直線 BC 之交點　∴　$\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{5}$

∵　E-B-C　∴　$\overline{EB}:\overline{BC}=3:2$

由分點公式 $6=\dfrac{2x_2+3\times4}{3+2}$，$3=\dfrac{2y_2+3\times5}{3+2}$，$4=\dfrac{2z_2+3\times6}{3+2}$

$\Rightarrow$　$x_2=9$，$y_2=0$，$z_2=1$　　故 $E(9，0，1)$



7. 設 $\overrightarrow{a}=(1，1，2)$，$\overrightarrow{b}=(2，-1，1)$，求與 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 同時垂直且長度 $2\sqrt{3}$ 的向量．

解答　$\pm(2，2，-2)$

解析　SOL 一：

令 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{c}=(l,m,n)$

則 $\begin{cases} l+m+2n=0\cdots\cdots① \\ 2l-m+n=0\cdots\cdots② \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} ①+2 \\ ①-②\times2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3l+3n=0 \\ -3l+3m=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} n=-l \\ m=l \end{cases}$

∴　$\overrightarrow{c}=(l,l,-l)$，又 $|\overrightarrow{c}|=2\sqrt{3}$

∴　$l^2+l^2+(-l)^2=(2\sqrt{3})^2$　$\Rightarrow$　$l=\pm2$ 故所求爲 $\pm(2,2,-2)$

SOL 二：

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix})=(3,3,-3)\Rightarrow \text{所求} \pm2\sqrt{3}[\frac{(3,3,-3)}{\sqrt{3^2+3^2+(-3)^2}}]=\pm(2,2,-2)$$

8. 設二向量 $\overrightarrow{a}=(1，x-1，2)$，$\overrightarrow{b}=(-1，0，3)$

(1) 若 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的夾角 $45°$，求 x 的值．

(2) 承(1) 若 $2\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 平分 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 之夾角，求實數 t 的值．

解答　(1)1;(2)$\sqrt{2}$

解析　(1) $\overrightarrow{a}=(1,\ x-1,\ 2)$，$\overrightarrow{b}=(-1,\ 0,\ 3)$

$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{1+(x-1)^2+4}=\sqrt{x^2-2x+6}$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-1+0+6=5$

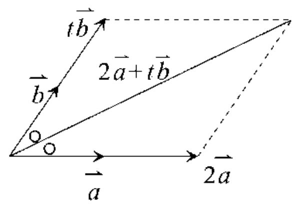
由$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos45°$知，$5=\sqrt{x^2-2x+6}\cdot\sqrt{10}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ 25=5(x^2-2x+6)\ \Rightarrow\ x^2-2x+1=0\ \Rightarrow\ x=1$

(2)由(1)之結果，知$\overrightarrow{a}=(1,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{b}=(-1,\ 0,\ 3)$

$2\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角，則$|2\overrightarrow{a}|=|t\overrightarrow{b}|=t|\overrightarrow{b}|$

$\sqrt{2^2+0+4^2}=t\sqrt{1^2+0+3^2}\ \Rightarrow\ \sqrt{20}=\sqrt{10}t\ \Rightarrow\ t=\sqrt{2}$



9. 設a，b，$c\in R$，且$a^2+b^2+c^2=9$，試求a，b，c之值使$a+2b-2c$有最大值，最小值．

解答　$a=1$，$b=2$，$c=-2$時有最大值9；$a=-1$，$b=-2$，$c=2$時有最小值-9

解析

$\because (a+2b-2c)^2\leqq(a^2+b^2+c^2)(1^2+2^2+(-2)^2)$，且$a^2+b^2+c^2=9$

$\therefore\ (a+2b-2c)^2\leqq 9\times9\ \Rightarrow\ -9\le a+2b-2c\le 9$

等號成立 $\Leftrightarrow\ \dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{-2}$，設$a=k$，$b=2k$，$c=-2k$

則當$a+2b-2c=9$時，$k+4k+4k=9\ \Rightarrow k=1$，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ -2)$

當$a+2b-2c=-9$時，$k+4k+4k=-9\ \Rightarrow k=-1$，$(a,\ b,\ c)=(-1,\ -2,\ 2)$

故$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ -2)$時，$a+2b-2c$有最大值9

$(a,\ b,\ c)=(-1,\ -2,\ 2)$時，$a+2b-2c$有最小值$-9$

10. 設x，y，$z\in R$，$x+y+z=4$，求x，y，z之值使$x^2+y^2+z^2+2x-4y$有最小值，並求此最小值．

解答　$x=0$，$y=3$，$z=1$；-2

解析

$\because\ x^2+y^2+z^2+2x-4y=(x+1)^2+(y-2)^2+z^2-5$

由柯西不等式知

$[1\cdot(x+1)+1\cdot(y-2)+1\cdot z]^2\leqq(1^2+1^2+1^2)[(x+1)^2+(y-2)^2+(z)^2]$

$\Rightarrow (x+y+z-1)^2 \leqq 3[(x+1)^2+(y-2)^2+z^2]$

$\because\ x+y+z=4\ \therefore (4-1)^2 \leqq 3[(x+1)^2+(y-2)^2+z^2]$

$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y-2)^2+z^2 \geq 3\ \Rightarrow\ (x+1)^2+(y-2)^2+z^2-5 \geq -2$

當 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$ 時，$x^2+y^2+z^2+2x-4y=-2$ 爲最小値

$\because\ x+y+z=4\ \therefore$ 此時 $x=0$，$y=3$，$z=1$

11. 設 x，y，$z \in R$ 且 $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{5}+\dfrac{(z-3)^2}{4}=1$，求 $x+y+z$ 之最大値，最小値．

解答　最大値 7，最小値 -3

解析

$\because\ \dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{5}+\dfrac{(z-3)^2}{4}=1$，由柯西不等式知

$[4\cdot(\dfrac{x-1}{4})+\sqrt{5}\cdot(\dfrac{y+2}{\sqrt{5}})+2\cdot(\dfrac{z-3}{2})]^2 \leqq [4^2+(\sqrt{5})^2+2^2][(\dfrac{x-1}{4})^2+(\dfrac{y+2}{\sqrt{5}})^2+(\dfrac{z-3}{2})^2]$

$\Rightarrow\ (x+y+z-2)^2 \leqq 25\times 1\ \Rightarrow\ -5 \leq x+y+z-2 \leq 5$

$\therefore\ -3 \leq x+y+z \leq 7$，故 $x+y+z$ 之最大値爲 7，最小値爲 -3

12. 設 x，y，z 爲正實數且 $x+y+z=1$，試求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ 的最小値，並求有最小値時的 x，y，z 之值．

解答　最小値 36，此時 $x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{1}{2}$

解析

$(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}+\dfrac{3}{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z})^2=36 \leqq [(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2+(\dfrac{2}{\sqrt{y}})^2+(\dfrac{3}{\sqrt{z}})^2][(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2]$

$$36 \leqq (x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z})$$

$$36 \leqq \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ 最小値 36，此時 $\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{y}}}=\dfrac{\sqrt{z}}{\frac{3}{\sqrt{z}}} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3} \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{6}，y=\dfrac{1}{3}，z=\dfrac{1}{2}$

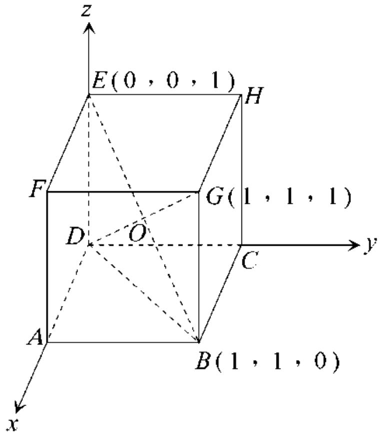
13. 有一隻小螞蟻在建立了直角坐標系的空間中在斜坡上順著向量 $\overrightarrow{v}=(-2，-1，2)$爬行，起始點的位置是(1，2，3)．在此直角坐標系裡，x，y，z 軸上的一單位皆代表一公分長，小螞蟻每分鐘爬行 99 公分．若爬行方向不變，則小螞蟻 5 分鐘後的位置在哪裡？以坐標表示，不必寫出單位．

解答　$(-329，-163，333)$

解析　$\dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}=\dfrac{(-2,-1,2)}{3}=(\dfrac{-2}{3},\ \dfrac{-1}{3},\ \dfrac{2}{3})$（單位向量），小螞蟻共爬了 $99\times 5=495$

所求$=(1,\ 2,\ 3)+495(\dfrac{-2}{3},\ \dfrac{-1}{3},\ \dfrac{2}{3})=(-329,\ -163,\ 333)$

14. $EFGH$ - $ABCD$ 是一正方體，四邊形 $EDBG$ 是一矩形，對角線 $\overline{DG}$，$\overline{EB}$ 交於 O 點，求 $\cos\angle BOG$ 及 $\cos\angle BDG$.



解答　$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

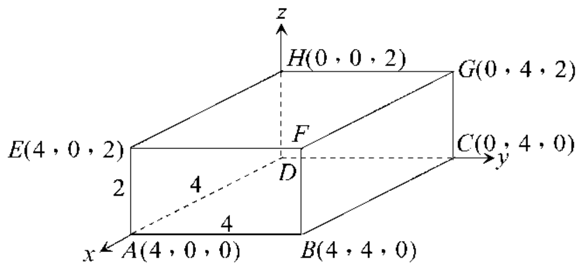
解析　(1) $\overrightarrow{EB}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{DG}=(1,\ 1,\ 1)$，

設 $\angle BOG=\theta$，則 θ 為 $\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{DG}$ 的夾角

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{DG}||\overrightarrow{EB}|}=\frac{1+1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

(2)令 $\angle BDG=\phi$，則 $\cos\phi=\dfrac{\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DG}||\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{1+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

15. 有一長方體 $ABCD$ - $EFGH$，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{AE}=2$，$\overline{AD}=4$，若此長方體的兩條對角線 $\overline{EC}$ 與 $\overline{AG}$ 的銳夾角為 θ，則 $\cos\theta=$__________ .



解答　$\dfrac{7}{9}$;

解析　如圖，建立直角坐標系

$\overrightarrow{EC}=(-4,\ 4,\ -2)$，$|\overrightarrow{EC}|=6$

$\overrightarrow{AG}=(-4,\ 4,\ 2)$，$|\overrightarrow{AG}|=6$；　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{EC}|\cdot|\overrightarrow{AG}|}=\dfrac{16+16-4}{6\times 6}=\dfrac{7}{9}$

16. 設 $\overrightarrow{a}=(3,\ 0,\ 5)$，$\overrightarrow{a}=(2,\ 1,\ 3)$，

(1)若 $\overrightarrow{c}=(1,\ 2,\ -1)$，且 $(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}$，求實數 t .

(2)若 $\overrightarrow{d}=(1,\ 2,\ k)$，且 $(\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b})\,//\,\overrightarrow{d}$，求實數 k，r .

解答　(1)2;(2)k=1，　r=－2

解析

$$(1)\ \vec{a}+t\vec{b}=(3,\ 0,\ 5)+t(2,\ 1,\ 3)=(3+2t,\ t,\ 5+3t),$$

$$由(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{c}=0\Rightarrow(3+2t,\ t,\ 5+3t)\cdot(1,\ 2,\ -1)=0$$

$$\Rightarrow 3+2t+2t-5-3t=0\Rightarrow t=2\ .$$

$$(2)\ \vec{a}+r\vec{b}=(3+2r,\ r,\ 5+3r)//\vec{d}\Rightarrow\frac{3+2r}{1}=\frac{r}{2}=\frac{5+3r}{k}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r=6+4r\\ rk=10+6r\end{cases}\Rightarrow(k,\ r)=(1,\ -2)\ .$$

17. 設$A(2，0，0)$，$B(-1，-2，-2)$，$C(4，3，-2)$，則
(1)$\triangle ABC$的面積爲____________．　(2)過A,B,C三點之平面E方程式爲____________．

解答　(1)$\frac{15}{2}$;(2) $2x-2y-z-4=0$

解析

$$\overrightarrow{AB}=(-3，-2，-2)，\ \overrightarrow{AC}=(2，3，-2)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-2&-2\\3&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&-3\\-2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&-2\\2&3\end{vmatrix}\right)=(10,-10,-5)=2(2,-2,-1),$$

$$(1)\triangle ABC的面積=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\ =\frac{1}{2}\sqrt{10^2+(-10)^2+(-5)^2}=\frac{15}{2}=$$

(2)設E之法向量$\vec{n}$，　取$\vec{n}=(2，-2，-1)$且平面過$A(2，0，0)$

$$\therefore\ E：2(x-2)-2(y-0)-(z-0)=0\quad\Rightarrow\quad E：2x-2y-z-4=0$$

18. 空間中含$A(1，0，0)$，$B(0，1，0)$，$C(0，0，1)$之平面方程式爲____________．

解答　$x+y+z=1$

解析

用截距式得$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$，即$x+y+z=1$

19. 求含$A(2，1，0)$，$B(1，0，2)$，$C(-1，1，1)$的平面E之方程式____________．

解答　$x+5y+3z-7=0$

解析

$$\overrightarrow{AB}=(-1，-1，2)，\ \overrightarrow{AC}=(-3，0，1)$$

設E之法向量$\vec{n}=(a,b,c)$，則$\begin{cases}-a-b+2c=0\\-3a+c=0\end{cases}$

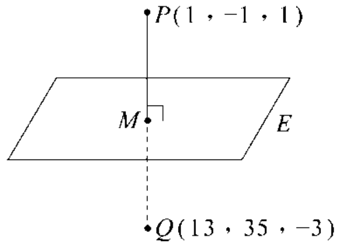
$a:b:c=\begin{vmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & -3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & -1\\-3 & 0\end{vmatrix}=(-1):(-5):(-3)\Rightarrow \quad a:b:c=1:5:3$

$\therefore$取 $\overrightarrow{n}=(1,5,3)$ ， $(x-2)+5(y-1)+3z=0 \quad \Rightarrow \quad x+5y+3z-7=0$

20. 點 $P(1, -1, 1)$對於平面 E 之對稱點爲 $Q(13, 35, -3)$，則 E 之方程式爲____________ .

解答 $3x+9y-z-175=0$

解析



$\overline{PQ}$之中點 $M(7, 17, -1)\in E$

$\overrightarrow{PQ}=(12, 36, -4)\perp E$ 取平面 E 之法向量 $\overrightarrow{n}=(3, 9, -1)$

$\therefore$ E： $3(x-7)+9(y-17)-(z+1)=0$

$\Rightarrow$ E： $3x+9y-z-175=0$

21. 通過點$(1, 0, 2)$且與 x 軸垂直的平面方程式爲____________ .

解答 $x=1$

解析

$\because$ 垂直 x 軸的平面法向量 $\overrightarrow{n_x}=(1, 0, 0)$

$\therefore$ 平面方程式爲 $1\cdot(x-1)+0(y-0)+0(z-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x-1=0$

22. 過點 $A(-2, 1, 1)$，$B(1, 0, 3)$的平面 E，若與平面 F： $x-2y+3z=5$ 垂直，則 E 的方程式爲____________ .

解答 $x-7y-5z+14=0$

解析

設平面 E，F 的法線向量各爲 $\overrightarrow{n_1}$ ， $\overrightarrow{n_2}$ $\because$ $E\perp F$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

又 A，$B\in E$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AB}$ $\therefore$ $\overrightarrow{n_1}$ 爲 $\overrightarrow{n_2}$ ， $\overrightarrow{AB}$的公垂向量

由 $\overrightarrow{AB}=(3, -1, 2)$ ， $\overrightarrow{n_2}=(1, -2, 3)\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{n_2}=$ $(1, -7, -5)$

$\therefore$ E： $1\cdot(x+2)-7(y-1)-5(z-1)=0\Rightarrow x-7y-5z+14=0$

23. 平面 E 過點 $A(1, 0, -1)$且與平面 E_1： $x-y+z+5=0$，E_2： $x+2y-z=8$ 都垂直，則 E 的方程式爲____________ .

解答 $x-2y-3z=4$

解析

設平面 E，E_1，E_2的法線向量各爲 $\overrightarrow{n}$，$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$

$\because$ $E \perp E_1 \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n_1}$；$E \perp E_2 \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n_2}$ $\therefore$ $\overrightarrow{n}$ 為 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ 的公垂向量

由 $\overrightarrow{n_1} = (1，-1，1)$，$\overrightarrow{n_2} = (1，2，-1) \Rightarrow \overrightarrow{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (-1，2，3)$

$\therefore E$：$(-1)(x-1)+2\cdot(y-0)+3\cdot(z+1)=0 \Rightarrow x-2y-3z=4$

24. 平面 E_1：$x+2y-3z+3=0$，E_2：$3x-2y+z+5=0$ 相交於直線 L，任取 L 上兩相異點 P，Q，若點 $A(3，-1，0)$，則平面 APQ 的方程式為＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $x+10y-13z+7=0$

解析

點 P，Q 在平面 APQ 上 $\Rightarrow L$ 在平面 APQ 上

而 L 為平面 E_1：$x+2y-3z+2=0$，E_2：$3x-2y+z+5=0$ 的交線，

$\therefore$ 可設平面 APQ 的方程式為 $(3x-2y+z+5)+k(x+2y-3z+3)=0$

$\because$ 過點 $A(3，-1，0)$ $\therefore$代入 $k=-4$

$\therefore$ 平面 APQ：$(3x-2y+z+5)-4(x+2y-3z+3)=0$

$\Rightarrow$ 平面 APQ：$x+10y-13z+7=0$

25. 設三平面 E_1：$2x+y-4=0$，E_2：$y+2z=0$，E_3：$3x+2y+3z=6$，若平面 E 過 E_1 與 E_2 之交線，且與平面 E_3 垂直，則平面 E 的方程式為＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $x-z-2=0$

解析

$\because$ 平面 E 過平面 E_1 與 E_2 的交線

$\therefore$ 令平面 E 的方程式為 $2x+y-4+k(y+2z)=0$

$\Rightarrow$ $2x+(1+k)y+2kz-4=0$ $\because$ E 與 E_3：$3x+2y+3z=6$ 垂直

$\therefore$二法向量$(2，1+k，2k)\cdot(3，2，3)=0 \Rightarrow 6+2(1+k)+6k=0 \Rightarrow k=-1$

故平面 E 的方程式為 $2x-2z-4=0$，即 $x-z-2=0$

26. 設一平面 E 平行平面 $2x+y+2z-1=0$ 且與三坐標平面所成四面體之體積為 9，則此平面 E 的方程式為＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $2x+y+2z=\pm 6$

解析

$\because$平面 E 與平面 $2x+y+2z-1=0$ 平行

$\therefore$設平面 E 的方程式 $2x+y+2z=k$，則交三軸分別於 $(\frac{k}{2},0,0)$; $(0,k,0)$; $(0,0,\frac{k}{2})$;

$\because$ E 與三坐標平面所圍成的四面體體積 $V=\frac{1}{3}|\frac{k}{2}|\cdot\frac{1}{2}|k\cdot\frac{k}{2}|=\frac{1}{24}|k^3|$

$\therefore$ $\frac{1}{24}|k|^3=9 \Rightarrow |k|^3=6^3$ $\therefore$ $|k|=6 \Rightarrow k=\pm 6$

故平面 E 的方程式為 $2x+y+2z=\pm 6$