高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：99.11.04
範圍	2-3 空間向量	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. 設 $\overrightarrow{a}=(1,-1,2),\ \overrightarrow{b}=(-3,1,-2)$，求 $\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)=$____________ .

解答 -70

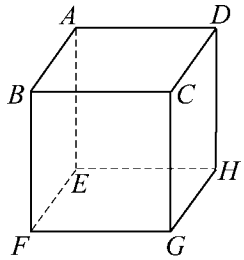
解析 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(5,-3,6)$，$\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=(-8,2,-4)$，

$$\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)=-40-6-24=-70 .$$

2. 已知空間中兩向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(1,-2,-\sqrt{3}\right)$，則△$ABC$ 之面積=____________ .

解答 $\sqrt{2}$

解析 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4+3}=\sqrt{2}$.

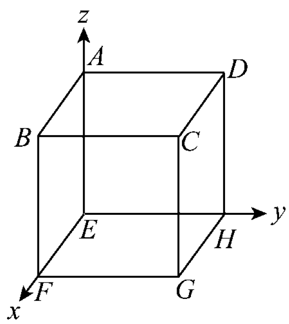


3. 如圖，正立方體的兩對角線 $\overrightarrow{AG}$ 與 $\overrightarrow{BH}$ 夾角爲 θ，則 $\cos\theta=$____________ .

解答 $\dfrac{1}{3}$

解析

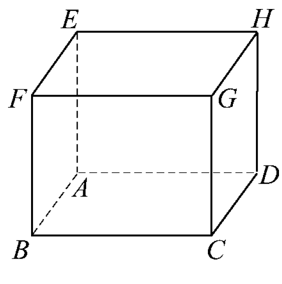
設 $\overline{AB}=1$，建立坐標系：$A(0,0,1)$，$G(1,1,0)$，$B(1,0,1)$，$H(0,1,0)$



$\Rightarrow\overrightarrow{AG}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{BH}=(-1,1,-1)$，

$$\therefore\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}}{\left|\overrightarrow{AG}\right|\left|\overrightarrow{BH}\right|}=\frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3} .$$

4. 如圖平行六面體 $ABCD-EFGH$，其中 $\overrightarrow{AB}=(2,-1,1),\ \overrightarrow{AC}=(3,3,6)$，且 $\overline{AE}\perp\overline{AB},\ \overline{AE}\perp\overline{AC}$



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ____________;

(2) $\overline{BH}$ 在平面 ABC 的正射影長爲____________;

(3)若 P 爲△ABC 重心，且 $\overrightarrow{GP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}+\gamma\overrightarrow{AE}$，則有序實數 $(\alpha,\beta,\gamma)=$_______ .

解答 (1)9;(2) $\sqrt{42}$;(3) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-2}{3},-1\right)$

解析 (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6-3+6=9$.

(2)(ⅰ)$\because \overline{AE} \perp \overline{AB}$ 且 $\overline{AE} \perp \overline{AC}$，$\overline{AE} \perp$ 平面 $ABCD$，$\overline{BH}$ 在平面 ABC 正射影長即為 $\overline{BD}$.

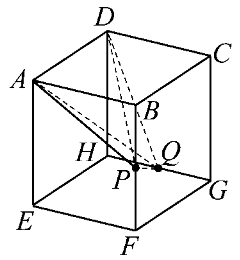
(ⅱ) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (1,4,5)$， $\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (-2,1,-1) + (1,4,5) = (-1,5,4)$

$\therefore \overline{BD} = \sqrt{1+25+16} = \sqrt{42}$.

(3) $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}\right) = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right)$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$， $\therefore (\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, -1\right)$.

5. 右圖是稜長為 4 的正六面體，P 為 $\overline{BF}$ 中點，Q 為 $\overline{GH}$ 中點，則



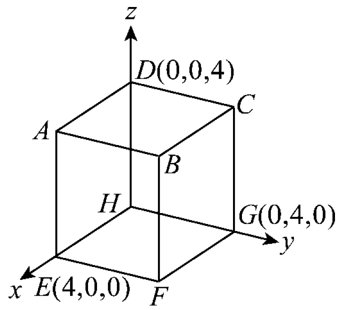
(1) $\overline{PD} =$ ____________；

(2)△ APQ 的面積 = ____________；

(3) $\overleftrightarrow{AP}$ 和 $\overleftrightarrow{DQ}$ 的距離 = ____________ .

解答 (1)6;(2) $2\sqrt{29}$;(3)4

解析 建立坐標系：



(1) 設 $P(4,4,2)$， $D(0,0,4)$， $\therefore \overline{PD} = \sqrt{16+16+4} = 6$.

(2) 設 $A(4,0,4)$ ，$Q(0,2,0)$

$\overrightarrow{PA} = (0,-4,2)$， $\overrightarrow{PQ} = (-4,-2,-2)$，

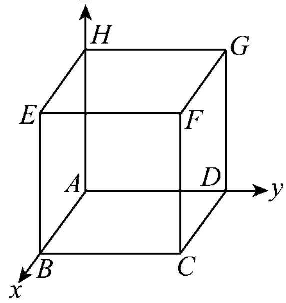
△ APQ 的面積 $= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{PA}\right|^2 \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 - \left(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20 \cdot 24 - (0+8-4)^2} = 2\sqrt{29}$.

(3)$\because \overline{AD} \perp \overleftrightarrow{AP}$, $\overline{AD} \perp \overleftrightarrow{DQ}$， $\therefore$ 所求距離為 $\overline{AD} = 4$.

6. 有一正立方體之邊長為 1，設兩對角線之夾角為 θ，則 $\sin\theta =$ ____________；

解答 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

解析



(1)建立坐標系：設 $A(0,0,0)$，則 $F(1,1,1)$， $C(1,1,0)$， $H(0,0,1)$，

又 $\overrightarrow{AF} = (1,1,1)$， $\overrightarrow{CH} = (-1,-1,1)$，

$\cos\theta = \frac{\pm \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CH}}{\left|\overrightarrow{AF}\right|\left|\overrightarrow{CH}\right|} = \frac{\pm(-1-1+1)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \pm\frac{1}{3}$， $\therefore \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. 設空間中三點 $A(1,2,3)$，$B(2,4,1)$，$C(6,2,4)$，試求

(1)若 $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{v}$，則實數 k 之值為 ____________；

(2)△ ABC 的面積為 ____________；

(3) C 點到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的最短距離爲＿＿＿＿＿＿ .

解答 (1) -3 ;(2) $\frac{15}{2}$;(3)5

解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(1,2,-2),\ \overrightarrow{AC}=(5,0,1)$ ，$\overrightarrow{v}=(1,2,-2)+k(5,0,1)=(1+5k,2,-2+k)$ ，

$\because \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{v}$ ，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{v}=0\Rightarrow 1+5k+4+4-2k=0$ ，$\therefore k=-3$.

(2) $\overrightarrow{AB}=(1,2,-2),\ \overrightarrow{AC}=(5,0,1)$ ，$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 26-(5+0-2)^2}=\frac{15}{2}$.

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot d\left(C,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{15}{2}\Rightarrow 3\cdot d\left(C,\overleftrightarrow{AB}\right)=15$ ，$\therefore d\left(C,\overleftrightarrow{AB}\right)=5$.

8. 已知空間中三點 $A(1,0,0),\ B(1,1,1),\ C(0,0,1)$ ，求

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$＿＿＿＿＿＿；

(2) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的單位公垂向量＿＿＿＿＿＿；

(3) $\triangle ABC$ 的面積爲＿＿＿＿＿＿；

(4) $\left(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{BC}$ ，求 $t=$＿＿＿＿＿＿ .

解答 (1)1;(2) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;(4)1

解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(0,1,1),\ \overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$ ，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$.

(2) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,1,1)\times(-1,0,1)=\left(\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}\right)=(1,-1,1)$ ，

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$ ；單位公垂向量(長度爲 1)= $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(3) $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(4) $\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=(-t,1,t+1),\ \overrightarrow{BC}=(-1,-1,0)$ ，

$\left(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow(-t)\cdot(-1)+1\cdot(-1)+(t+1)\cdot 0=0,\quad t=1$.

9. 空間向量 $\overrightarrow{a}=(1,-2,2)$ ，$\overrightarrow{b}=(1,2,3)$ ，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ ，其中 t 爲實數，

(1)若 $\left|\overrightarrow{c}\right|$ 有最小値，則 $t=$＿＿＿＿＿＿ .

(2) 若 $\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ 之夾角，則 $t=$＿＿＿＿＿＿ .

解答 (1) $\frac{-3}{14}$;(2) $\frac{3}{\sqrt{14}}$

解析

(1) $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(1+t,-2+2t,2+3t)$,

$\left|\overrightarrow{c}\right|=\sqrt{14t^2+6t+9}=\sqrt{14\left(t+\frac{3}{14}\right)^2+\frac{117}{14}}$, $\therefore t=\frac{-3}{14}$時, $\left|\overrightarrow{c}\right|$有最小值 .

(2) 若 $\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 之夾角，則$t|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|\Rightarrow t\cdot\sqrt{14}=3, t=\frac{4}{\sqrt{13}}$

10. $\overrightarrow{a}=(-1,-1,4)$, $\overrightarrow{b}=(0,-3,3)$, $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲θ , 則

(1) $\cos\theta=$ ____________ ; (2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的公垂單位向量（長度爲 1）爲____________ .（二解）

解答 (1) $\frac{5}{6}$;(2) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$

解析 (1) $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\frac{0+3+12}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$.

(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -3 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & -3\end{vmatrix}\right)=(9,3,3)=3(3,1,1)$,

$\therefore$所求$=\pm\frac{(3,1,1)}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

11.設$\overrightarrow{OA}=(1,2,-1)$, $\overrightarrow{OB}=(2,0,1)$, 若$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$, 求$\overrightarrow{AC}=$____________ .

解答 $(-4,-12,7)$

解析 設$\overrightarrow{AC}=(x,y,z)\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(x+1,y+2,z-1)$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(x-1,y+2,z-2)$,

$\because\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$, $\therefore 2(x+1)+(z-1)=0\Rightarrow 2x+z=-1\cdots$①

$\because\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$, $\therefore$令$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-1}=t\cdots$②

由②： $x=t+1,\ y=2t-2,\ z=-t+2$ 代入① $2(t+1)+(-t+2)=-1\Rightarrow t=-5$,

$\therefore(x,y,z)=(-4,-12,7)=\overrightarrow{AC}$.

12.若三向量$\overrightarrow{a}=(1,2,k-1)$, $\overrightarrow{b}=(4,1,-k)$, $\overrightarrow{c}=(-1,2,k+3)$兩兩互相垂直，求$k$之值爲_________ .

解答 -2

解析 (i) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0\quad\Rightarrow 4+2-k^2+k=0\Rightarrow k^2-k-6=0\quad\Rightarrow k=3,\ -2\cdots$①

(ii) $\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}\Rightarrow\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0\quad\Rightarrow -4+2-k^2-3k=0\quad\Rightarrow k^2+3k+2=0\Rightarrow k=-2,\ -1\cdots$②

(iii) $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}\Rightarrow\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0\Rightarrow -1+4+k^2+2k-3=0\Rightarrow k^2+2k=0\Rightarrow k=-2,\ 0\cdots$③

由①②③，$\therefore k=-2$.

13.已知 $\overrightarrow{a}=(4,-1,3)$, $\overrightarrow{b}=(-2,1,-2)$，若 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$ ，$\left|\overrightarrow{n}\right|=6$，求 $\overrightarrow{n}=$____________ .

解答 $(-2,4,4)$或$(2,-4,-4)$

解析

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right)=(-1,2,2)$$

$$\overrightarrow{n}=\pm6\cdot\frac{(-1,2,2)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}=\pm(-2,4,4)$$

14.設 $P(2,0,1)$, $Q(3,1,-1)$, $R(1,-1,2)$, $A(3,-2,1)$，

(1)令 $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{PQ}-3\overrightarrow{RQ}$，則 $\overrightarrow{a}=$____________；(2) $2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{a}$ ，則點 B 之坐標爲____________ .

解答 (1) $(-4,-4,5)$;(2) $\left(-3,-8,\frac{17}{2}\right)$

解析 (1) $\overrightarrow{PQ}=(1,1,-2)$， $\overrightarrow{RQ}=(2,2,-3)$，

$\therefore\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{PQ}-3\overrightarrow{RQ}=2(1,1,-2)-3(2,2,-3)=(-4,-4,5)$.

(2)設 $B(x,y,z)$，

$\overrightarrow{AB}=(x-3,y+2,z-1)$， $2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{a}\Rightarrow 2(x-3,y+2,z-1)=3(-4,-4,5)$，

$\therefore 2x-6=-12,\ 2y+4=-12,\ 2z-2=15$，得 $x=-3,\ y=-8,\ z=\frac{17}{2}$，$\therefore B\left(-3,-8,\frac{17}{2}\right)$.

15.$\triangle ABC$， $A(-1,1,0)$, $B(0,3,3)$, $C(1,-2,-1)$，則 $\angle A=$____________ .

解答 $120°$

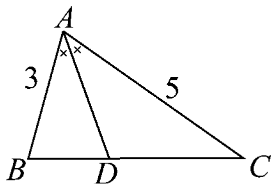
解析 $\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-3,-1)$, $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{2-6-3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle A=120°$.

16.空間中 $P(-1,4,7)$， $Q(2,a,6)$， $R(5,4,b)$ 三點共線，數對 $(a,b)=$____________ .

解答 $(4,5)$

解析 $\overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{PR}\Rightarrow(3,a-4,-1)//(6,0,b-7)\quad\Rightarrow\dfrac{3}{6}=\dfrac{-1}{b-7},\ a-4=0\Rightarrow a=4,\ b=5$， 17.△$ABC$ 中，$A(4,1,3)$，$B(6,3,4)$，$C(4,5,6)$，則 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，D 之坐標爲______．

解答 $\left(\frac{21}{4},\frac{15}{4},\frac{19}{4}\right)$



解析

$\overline{AB}=\sqrt{(6-4)^2+(3-1)^2+(4-3)^2}=3$，

$\overline{AC}=\sqrt{(4-4)^2+(5-1)^2+(6-3)^2}=5$，由內分比性質

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:5$，∴ D 之坐標爲 $\left(\frac{5\cdot 6+3\cdot 4}{3+5},\frac{5\cdot 3+3\cdot 5}{3+5},\frac{5\cdot 4+3\cdot 6}{3+5}\right)=\left(\frac{21}{4},\frac{15}{4},\frac{19}{4}\right)$．

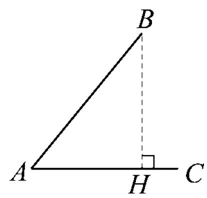
18.已知 $A(1,0,1)$，$B(3,-1,2)$，$C(0,1,-1)$，求

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 之正射影長爲__________；

(2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 之正射影爲__________；

(3)點 B 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上之投影點坐標爲__________．

解答 (1) $\frac{5}{\sqrt{6}}$；(2) $\left(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right)$；(3) $\left(\frac{11}{6},-\frac{5}{6},\frac{8}{3}\right)$



解析

(1)∵ $\overrightarrow{AB}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,-2)$，

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 之正射影長爲 $\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right|=\left|\frac{-2-1-2}{\sqrt{6}}\right|=\frac{5}{\sqrt{6}}$．

(2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 之正射影爲 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}\right)\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-2-1-2}{6}\right)(-1,1,-2)=\left(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right)$．

(3) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=(1,0,1)+\left(\frac{5}{6},-\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{11}{6},-\frac{5}{6},\frac{8}{3}\right)$，∴投影點坐標爲 $\left(\frac{11}{6},-\frac{5}{6},\frac{8}{3}\right)$．

19.空間中有 A，B，C，D 四點，已知 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC=\angle BCD=120°$，而 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之夾角爲 $60°$，求 $\overline{AD}$ 之長爲__________．

解答 5

解析 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2-2\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos120^\circ+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\cos60^\circ-2\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\cos120^\circ$$

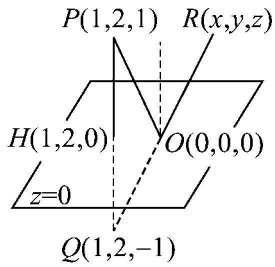
$$=1+4+9-2\cdot1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot1\cdot3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot2\cdot3\left(-\frac{1}{2}\right)=25,$$

$\therefore\left|\overrightarrow{AD}\right|=5$，$\therefore\overline{AD}$ 之長爲 5．

20.在空間坐標中，設 xy 平面爲一鏡面，有一光線通過點 $P(1,2,1)$，射向鏡面上的點 $O(0,0,0)$，經鏡面反射後通過點 R，若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$，則 R 點的坐標爲____________．

解答　$(-2,-4,2)$

解析



$P(1,2,1)$ 對 $z=0$ 成對稱之點爲 $Q(1,2,-1)$，

$\because\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OR}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OR}}=\dfrac{1}{2}$，

設 $R(x,y,z)$，由分點公式得 $(0,0,0)=(\dfrac{2+x}{3},\dfrac{4+y}{3},\dfrac{-2+z}{3})$

$\Rightarrow x=-2$，$y=-4$，$z=2$，$\therefore R(-2,-4,2)$．

21.設 $\overrightarrow{a}=(2,-3,-1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-1,2)$，若 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 30°，求 $t=$____________．

解答　2

解析　$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(2,-3,-1)+t(1,-1,2)=(2+t,-3-t,-1+2t)$，

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{(2+t)^2+(-3-t)^2+(-1+2t)^2}=\sqrt{6t^2+6t+14},$$

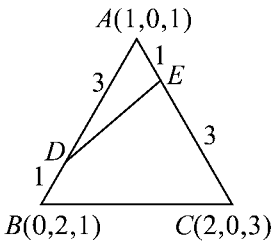
$$\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos30^\circ\Rightarrow$$

$$1\cdot(2+t)-(-3-t)+2(-1+2t)=\sqrt{6t^2+6t+14}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$6t+3=\sqrt{6t^2+6t+14}\cdot\frac{\sqrt{18}}{2}$$

平方整理得 $t^2+t-6=0\Rightarrow(t+3)(t-2)=0\Rightarrow t=-3$ 或 $t=2$，但右式爲正，$\therefore t=2$．

22.空間三點 $A(1,0,1)$，$B(0,2,1)$，$C(2,0,3)$；已知 D，E 分別爲 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD}:\overline{BD}=3:1$，$\overline{AE}:\overline{CE}=1:3$，則 $\overline{DE}=$____________．



解答 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

解析

利用分點公式:

$D=\frac{3}{4}(0,2,1)+\frac{1}{4}(1,0,1)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2},1\right)$

$E=\frac{3}{4}(1,0,1)+\frac{1}{4}(2,0,3)=\left(\frac{5}{4},0,\frac{3}{2}\right)$,

$\overline{DE}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

23.令 $A(-1,6,0)$, $B(3,-1,-2)$, $C(4,4,5)$ 爲坐標空間中三點．若 D 爲空間中的一點且滿足

$3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ ，則點 D 的坐標爲＿＿＿＿＿＿ .

解答 $(-7,30,18)$

解析

$3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow 3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})-4(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{0}$

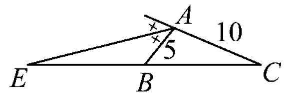
$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=3(-1,6,0)-4(3,-1,-2)+2(4,4,5)=(-7,30,18)$

$\therefore D(-7,30,18)$.

24.設 $A(3,-1,2)$, $B(0,3,2)$, $C(3,7,-4)$, 若 $\angle A$ 之外角平分線交直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 E , 求 E 之坐標爲＿＿＿ .

解答 $(-3,-1,8)$

解析



$E(x,y,z)$,

$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=10$,

$\overline{EB}:\overline{EC}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:2$,

$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}\Rightarrow(0-x,3-y,2-z)=\frac{1}{2}(3-x,7-y,-4-z)\Rightarrow x=-3,\ y=-1,\ z=8$,

$\therefore E\ (-3,-1,8)$. 亦可用外分點公式