

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.10.27				
範圍	2-2 空間坐標系	班級	二年__班	姓名
		座號		

一、填充題 (每題 10 分)

1. 點  $P(-3, 2, -4)$ , 則

- (1)  $P$  在  $y$  軸上正射影的坐標為\_\_\_\_\_;  
 (2)  $P$  與  $z$  軸的距離為\_\_\_\_\_;  
 (3)  $P$  在  $yz$  平面上正射影的坐標為\_\_\_\_\_.

**解答** (1)  $(0, 2, 0)$ ; (2)  $\sqrt{13}$ ; (3)  $(0, 2, -4)$

**解析** (1)  $(0, 2, 0)$ . (2)  $\sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ . (3)  $(0, 2, -4)$ .

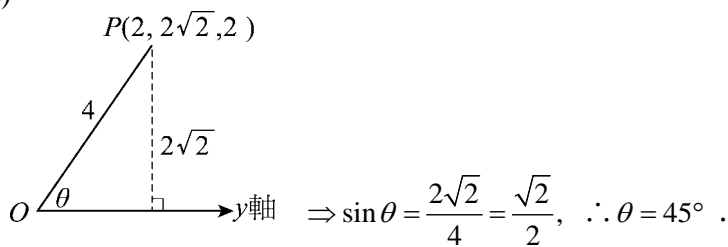
2. 設  $P$  點在第一卦限,  $P$  與  $x$  軸的距離為  $2\sqrt{3}$ ,  $P$  與  $y$  軸的距離為  $2\sqrt{2}$ ,  $P$  與  $xy$  平面的距離為 2  
 ( $O$  為原點) 求(1)  $P =$  \_\_\_\_\_; (2)  $\overline{OP}$  與  $y$  軸夾的銳角\_\_\_\_\_.

**解答** (1)  $(2, 2\sqrt{2}, 2)$ ; (2)  $45^\circ$

**解析** (1) 設  $P(x, y, z)$ ,  $x > 0, y > 0, z > 0$ , 則

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + z^2} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2 + z^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}, x = 2, \\ z = 2 \end{cases} \therefore P(2, 2\sqrt{2}, 2).$$

(2)



3. 設  $P$  點在第一卦限, 而且與  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸的距離分別為 5,  $\sqrt{34}$ ,  $\sqrt{41}$ , 則  $P$  點的坐標為

**解答**  $(5, 4, 3)$

**解析** 設  $P(x, y, z)$ ,  $x > 0, y > 0, z > 0$ ,

$$\text{則} \begin{cases} \sqrt{y^2 + z^2} = 5 \\ \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{34} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{41} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 25 \dots \text{①} \\ x^2 + z^2 = 34 \dots \text{②} \\ x^2 + y^2 = 41 \dots \text{③} \end{cases}$$

$\frac{\text{①} + \text{②} + \text{③}}{2}$ :  $x^2 + y^2 + z^2 = 50, \therefore x^2 = 25, y^2 = 16, z^2 = 9$ , 故  $P$  點的坐標為  $(5, 4, 3)$ .

4. 如右圖，設  $ABCD-EFGH$  是一個邊長為 2 的正六面體，則

(1) 四面體  $AEDB$  的體積為\_\_\_\_\_；

(2) 四面體  $AEDB$  的兩歪斜稜  $\overline{AE}$ ， $\overline{DB}$  的距離為\_\_\_\_\_。

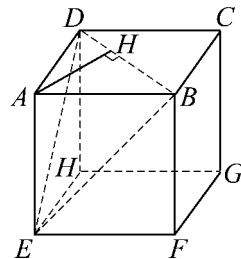
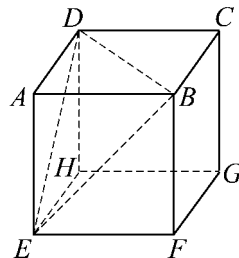
**解答** (1)  $\frac{4}{3}$ ; (2)  $\sqrt{2}$

**解析**

$$(1) \text{所求} = \frac{1}{3} \cdot (\triangle ABD \text{面積}) \cdot \text{高} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot 2 = \frac{4}{3} .$$

(2) 作  $\overline{AH} \perp \overline{BD}$ ，又  $\overline{AH} \perp \overline{AE}$ ，則  $\overline{AH}$  為所求，

$$\triangle ABD \text{的面積} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \overline{AH} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} .$$



5. 設線段  $\overline{AB}$  在  $xy$  平面， $yz$  平面， $zx$  平面上之正射影長分別為 5,  $4\sqrt{2}$ , 7, 求線段  $\overline{AB}$  長為\_\_\_\_\_。

**解答**  $\sqrt{53}$

**解析** 設  $A(0,0,0)$ ,  $B(a,b,c)$ ,

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \\ \sqrt{b^2 + c^2} = 4\sqrt{2} \\ \sqrt{a^2 + c^2} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \dots \textcircled{1} \\ b^2 + c^2 = 32 \dots \textcircled{2} \\ a^2 + c^2 = 49 \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

①+②+③:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 106 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 53, \quad \overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{53} .$$

6. 空間中二點  $A(1,2,1)$ ,  $B(2,-1,3)$ ，在  $x$  軸上一點  $P$  使  $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，則  $P$  的坐標為\_\_\_\_\_。

**解答**  $(4,0,0)$

**解析** 設  $P(x,0,0)$ ,

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 1^2 + (-3)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 5 = x^2 - 4x + 4 + 10$$

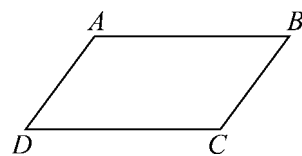
$$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4, \quad \therefore P(4,0,0) .$$

7. 設平行四邊形  $ABCD$  其中三頂點坐標為  $A(1,-7,3)$ ,  $B(-3,-18,-4)$ ,  $C(1,-7,-9)$ ，則  $D$  點的坐標 = \_\_\_\_\_。

**解答**  $(5,4,-2)$

**解析**  $\overline{AC}$  中點即為  $\overline{BD}$  中點，設  $D(x,y,z)$ ,

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{-7-7}{2}, \frac{-9+3}{2}\right) = \left(\frac{x-3}{2}, \frac{y-18}{2}, \frac{z-4}{2}\right) \Rightarrow x=5, y=4, z=-2, \quad \therefore D(5,4,-2) .$$



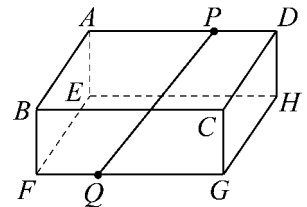
8. 空間中一點  $A(-3,1,-4)$

- (1) 點  $A$  在  $x$  軸,  $y$  軸與  $z$  軸的正射影的坐標為\_\_\_\_\_;  
 (2) 點  $A$  到  $x$  軸,  $y$  軸與  $z$  軸的距離為\_\_\_\_\_;  
 (3) 點  $A$  在  $xy$  平面,  $yz$  平面與  $zx$  平面的正射影的坐標為\_\_\_\_\_;  
 (4) 點  $A$  到  $xy$  平面,  $yz$  平面與  $zx$  平面的距離為\_\_\_\_\_;  
 (5) 點  $A$  關於  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸之對稱點為\_\_\_\_\_;  
 (6) 點  $A$  關於  $xy$  平面,  $yz$  平面,  $zx$  平面之對稱點為\_\_\_\_\_.

**解答** (1)  $(-3,0,0), (0,1,0), (0,0,-4)$ ; (2)  $\sqrt{17}, 5, \sqrt{10}$ ; (3)  $(-3,1,0), (0,1,-4), (-3,0,-4)$ ; (4)  $4, 3, 1$ ; (5)  $(-3,-1,4), (3,1,4), (3,-1,-4)$ ; (6)  $(-3,1,4), (3,1,-4), (-3,-1,-4)$

**解析** (1)  $(-3,0,0), (0,1,0), (0,0,-4)$ .  
 (2)  $\sqrt{17}, 5, \sqrt{10}$ .  
 (3)  $(-3,1,0), (0,1,-4), (-3,0,-4)$ .  
 (4)  $4, 3, 1$ .  
 (5)  $(-3,-1,4), (3,1,4), (3,-1,-4)$ .  
 (6)  $(-3,1,4), (3,1,-4), (-3,-1,-4)$ .

9. 設長方體  $ABCD-EFGH$  (如圖) 中,  $E(0,0,0), C(1,3,2), G(1,3,0)$ , 若  $\overline{AP}=2$  且  $\overline{FQ}=1$ , 則  $\overline{PQ}$  的長為\_\_\_\_\_.



**解答**  $\sqrt{6}$

**解析**  $P(0,2,2), Q(1,1,0), \overline{PQ} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ .

10. 設空間三點  $P(14,6,8), Q(2,0,12), R(8,10,-4)$ , 則  $\triangle PQR$  的形狀為\_\_\_\_\_.

**解答** 等腰直角三角形

**解析**  $\overline{PQ} = \sqrt{(14-2)^2 + 6^2 + (8-12)^2} = 14$ ,  
 $\overline{PR} = \sqrt{(14-8)^2 + (6-10)^2 + (8+4)^2} = 14$ ,  
 $\overline{QR} = \sqrt{(2-8)^2 + (-10)^2 + (12+4)^2} = 14\sqrt{2}$ ,  
 $\overline{PQ}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{QR}^2$ , 且  $\overline{PQ} = \overline{PR} \therefore \triangle PQR$  為等腰直角三角形.

11. 設點  $Q$  到  $O(0,0,0), A(-1,-1,0), B(-1,0,-1), C(0,-1,-1)$  四點皆等距, 試求  $Q$  點的坐標為\_\_\_\_\_.

**解答**  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

**解析** 設  $Q(x,y,z), \because \overline{QO} = \overline{QA} = \overline{QB} = \overline{QC}$ ,

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = (x+1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ y+z+1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \text{解得 } x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}, \therefore Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

12. 正立方體  $ABCD-EFGH$ ，其每一稜長均為 1，求  $A$  到平面  $BDE$  的距離為\_\_\_\_\_。

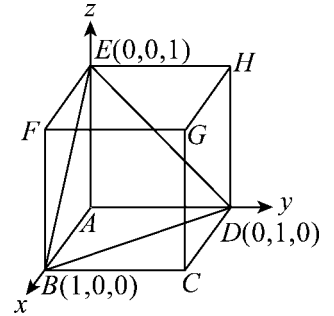
**解答**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**解析**

(i)  $\vec{EB} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{ED} = (0, 1, -1)$ ,  $\therefore \triangle EBD = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(ii) 四面體  $E-ABD$  體積

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} h, \therefore h = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



13. 設空間中兩點  $A(2, -1, 3)$ ,  $B(3, 4, 5)$ ，若  $P$  點在  $yz$  平面上，使得  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$  有最小值，求  $P$  點坐標為\_\_\_\_\_。

**解答**  $P\left(0, \frac{3}{2}, 4\right)$

**解析** 設  $P(0, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 &= 4 + (y+1)^2 + (z-3)^2 + 9 + (y-4)^2 + (z-5)^2 \\ &= 2y^2 - 6y + 2z^2 - 16z + 64 \\ &= 2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 2(z-4)^2 + \frac{55}{2}, \therefore P\left(0, \frac{3}{2}, 4\right). \end{aligned}$$

14. 設  $P(4, 2, 3)$ ,  $Q(5, -1, 7)$ ，求線段  $\overline{PQ}$  在  $yz$  平面上的正射影長為\_\_\_\_\_。

**解答** 5

**解析**  $P'(0, 2, 3)$ ,  $Q'(0, -1, 7)$ ,  $\therefore \overline{P'Q'} = \sqrt{9+16} = 5$ .

15. 已知空間中  $P$  點坐標為  $(3, 4, 5)$ ，試求

- (1)  $P$  點至  $y$  軸的距離\_\_\_\_\_;
- (2)  $P$  點至  $xy$  平面的對稱點  $Q$  的坐標\_\_\_\_\_;
- (3)  $O$  為原點，則  $\triangle OPQ$  的面積為\_\_\_\_\_。

**解答** (1)  $\sqrt{34}$ ; (2)  $Q(3, 4, -5)$ ; (3) 25

**解析** (1) 設  $y$  軸投影點  $H(0, 4, 0)$ ,

$$\therefore \text{距離為 } \overline{PH} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

(2)  $Q(3,4,-5)$  .

(3)  $\vec{OP}=(3,4,5)$  ,  $\vec{OQ}=(3,4,-5)$  ,

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 9 + 16 - 25 = 0 ,$$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OP}|^2 |\vec{OQ}|^2 - (\vec{OP} \cdot \vec{OQ})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{50 \cdot 50 - 0} = 25 .$$

16. 設  $P(1,-2,3)$  ,  $P$  點對於  $y$  軸的對稱點  $Q$  ,  $P$  點對於  $xz$  平面的投影點  $R$  ,  $\overline{RQ} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**解答**  $2\sqrt{11}$

**解析**  $Q(-1,-2,-3)$  ,  $R(1,0,3)$  ,  $\overline{RQ} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$  .

17. 已知  $\triangle ABC$  為一正三角形, 其中  $A(4,-5,2)$  ,  $B(2,1,6)$  ,  $C$  是  $xy$  平面上一點, 則  $C$  點坐標為  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

**解答**  $\left(\frac{32}{5}, \frac{9}{5}, 0\right)$  或  $(-2, -1, 0)$

**解析** 設  $C(x, y, 0)$  ,  $\because \triangle ABC$  為正三角形,

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2 + (-5-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{56}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (-6)^2 = 56 \\ (x-4)^2 + (y+5)^2 + (-2)^2 = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 \dots \textcircled{1} \\ (x-4)^2 + (y+5)^2 = 52 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 4x - 12y = 4 \Rightarrow x = 1 + 3y \text{ 代入 } \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow (1+3y-2)^2 + (y-1)^2 = 20 \Rightarrow 10y^2 - 8y = 18 \Rightarrow 5y^2 - 4y - 9 = 0 , \therefore$$

$$y = \frac{9}{5} \text{ 或 } -1, \text{ 又 } x = 1 + 3y$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{32}{5}, \frac{9}{5}\right) \text{ 或 } (-2, -1) \Rightarrow C \left(\frac{32}{5}, \frac{9}{5}, 0\right) \text{ 或 } (-2, -1, 0) .$$

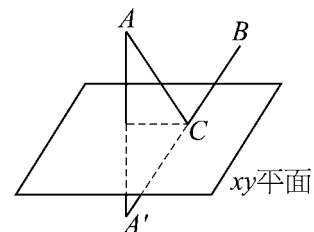
18.  $A(-1,2,1)$  ,  $B(3,4,5)$  ,  $C(x,y,0)$  , 求  $\triangle ABC$  的最小周長為  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

**解答**  $6 + 2\sqrt{14}$

**解析**

作  $A$  對  $xy$  平面之對稱點  $A'(-1,2,-1)$  ,  $\overline{AC} + \overline{BC}$  之最小值即  $\overline{A'B}$  ,

$$\therefore \text{最小周長為 } \overline{AB} + \overline{A'B} = \sqrt{16+4+16} + \sqrt{16+4+36} = 6 + 2\sqrt{14} .$$



19. 已知  $A(7,3,4)$  ,  $B(1,0,6)$  ,  $C(4,5,-2)$  ,  $P$  為空間中一點, 則(1)當  $P$  點之坐標為  $\underline{\hspace{2cm}}$  時,

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  會有最小值; (2)  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  的最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

**解答** (1)  $\left(4, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ ; (2)  $\frac{196}{3}$

**解析** 設  $P(x, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= (x-7)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 + (x-1)^2 + y^2 + (z-6)^2 + (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 \\ &= (3x^2 - 24x) + (3y^2 - 16y) + (3z^2 - 16z) + 156 \\ &= 3(x-4)^2 + 3\left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + 3\left(z - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{196}{3}, \\ & \text{當 } P\left(4, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) \text{ 時, } \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 之最小值為 } \frac{196}{3}. \end{aligned}$$

20. 過矩形  $ABCD$  的頂點  $A$ , 作垂直於這個矩形所在平面的垂直線段  $\overline{PA}$ , 若  $\overline{PB} = 5$ ,  $\overline{PC} = 3\sqrt{3}$ ,  $\overline{PD} = 3\sqrt{2}$ , 求  $\overline{PA} =$  \_\_\_\_\_ .

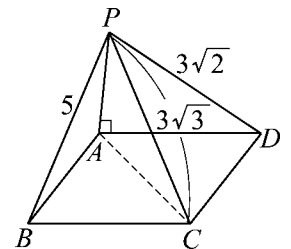
**解答** 4

**解析**  $\triangle PAB$  中:  $5^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AB}^2 \dots \textcircled{1}$

$$\triangle PAC \text{ 中: } (3\sqrt{3})^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\triangle PAD \text{ 中: } (3\sqrt{2})^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{BC}^2 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3}: (3\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2 = \overline{AB}^2, \therefore \overline{AB}^2 = 9 \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得: } \overline{PA} = 4.$$



21. 已知  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(-1, 1, 2)$ ,  $C(x, y, 0)$ , 求

(1)  $\triangle ABC$  的最小周長為 \_\_\_\_\_; (2) 當  $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$  為最小時,  $C$  點之坐標為 \_\_\_\_\_ .

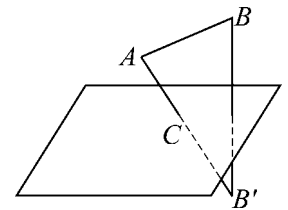
**解答** (1)  $\sqrt{6} + \sqrt{30}$ ; (2)  $\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$

**解析**

(1) 作  $B$  對  $xy$  平面之對稱點  $B'(-1, 1, -2)$ , 連  $\overline{AB'}$  與  $xy$  平面之交點即為所求  $C$  點,  $\overline{AC} + \overline{BC}$  之最小值即  $\overline{AB'}$ ,  $\therefore$  最小周長為  $\overline{AB} + \overline{AB'} = \sqrt{6} + \sqrt{30}$ .

$$\begin{aligned} (2) \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= [(x-1)^2 + (y-2)^2 + (-3)^2] + [(x+1)^2 + (y-1)^2 + (-2)^2] \\ &= 2x^2 + 2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{2}, \end{aligned}$$

當  $x=0$ ,  $y=\frac{3}{2}$  時, 有最小值  $\frac{31}{2}$ , 此時  $C\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$ .



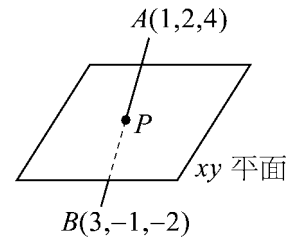
22.  $A(1,2,4)$ ,  $B(3,-1,-2)$ ,  $P(x,y,0)$ , 求  $\overline{PA} + \overline{PB}$  之最小值\_\_\_\_\_.

**解答** 7

**解析**

$A, B$  二點位於  $xy$  平面之異側,

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB}$  之最小值即為  $\overline{AB}$ ,  $\therefore \overline{AB} = \sqrt{4+9+36} = 7$ .



23. 空間中有三點  $A(1,1,0)$ ,  $B(0,1,1)$ ,  $C(1,0,1)$ , (1) 若在第一卦限有一點  $D$ , 使得  $DABC$  成爲正四面體, 則  $D$  點坐標爲\_\_\_\_\_ ; (2) 若  $M$  爲  $\overline{AD}$  中點,  $N$  爲  $\overline{BC}$  中點, 則  $\overline{MN} =$ \_\_\_\_\_.

**解答** (1)  $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ ; (2) 1

**解析**

(1) 設  $D(x, y, z)$ ,  $x > 0, y > 0, z > 0$ ,

$\therefore \overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = \overline{AB} = \sqrt{2}$ ,

$$\therefore \begin{cases} \overline{DA}^2 = 2 & \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2 \dots \textcircled{1} \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2 \dots \textcircled{2} \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \dots \textcircled{3} \end{cases} \\ \overline{DB}^2 = 2 \\ \overline{DC}^2 = 2 \end{cases}$$

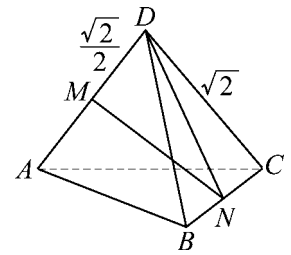
$\textcircled{1} - \textcircled{2}: -2x + 2z = 0 \Rightarrow z = x$ ,

$\textcircled{2} - \textcircled{3}: 2x - 2y = 0 \Rightarrow y = x$ ,

$\therefore (x-1)^2 + (x-1)^2 + x^2 = 2 \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$  或  $\frac{4}{3}$ ,  $\therefore D$

$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ .

(2)  $\overline{DN} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $\therefore \overline{MN} = \sqrt{\frac{6}{4} - \frac{2}{4}} = 1$ .



24. 線段  $\overline{AB}$  在  $xy$  平面,  $yz$  平面,  $zx$  平面上之投影長分別爲 3, 4, 5, 則  $\overline{AB}$  的長爲\_\_\_\_\_.

**解答** 5

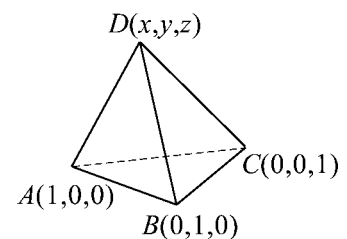
**解析** 取  $A(0,0,0)$ ,  $B(x,y,z)$ , 則  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 25, \therefore \overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5 \\ z^2 + x^2 = 25 \end{cases}$

25. 設  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $C(0,0,1)$  及  $D$  爲一正四面體之四個頂點, 求  $D$  點坐標爲\_\_\_\_\_.

**解答**  $(1,1,1)$  或  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

**解析**

設  $D(x, y, z)$ , 則  $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = \overline{AB} = \sqrt{2}$



$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2 \dots\dots\dots ①$$

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2 \dots\dots\dots ②$$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \dots\dots\dots ③$$

$$①-②: -2x+2y=0 \Rightarrow x=y \text{ 代入 } ②, ③$$

$$y^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2 \dots\dots ④$$

$$2y^2 + (z-1)^2 = 2 \dots\dots\dots ⑤$$

$$④-⑤: -2y+2z=0 \Rightarrow y=z, \therefore x=y=z,$$

$$\text{代入 } ① (x-1)^2 + x^2 + x^2 = 2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(3x+1) = 0 \Rightarrow x=1 \text{ 或 } -\frac{1}{3}, \therefore$$

$$D(1,1,1) \text{ 或 } \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

26. 點  $A$  對  $yz$  平面的對稱點為  $A'$ ,  $A'$  對  $y$  軸的對稱點為  $A''$ , 已知  $A''$  之坐標為  $(2, 1, -3)$ , 求  $A$  之坐標為\_\_\_\_\_.

**解答**  $(2, 1, 3)$

**解析** 設  $A$  之坐標為  $(a, b, c)$ , 則  $A'(-a, b, c)$ ,  $\Rightarrow A''(a, b, -c) = (2, 1, -3)$ ,  
 $\therefore a=2, b=1, -c=-3 \Rightarrow a=2, b=1, c=3, \therefore A(2, 1, 3)$ .

27. 如圖所示,  $ABCD-EFGH$  為邊長等於 1 之正立方體. 若  $P$  點在立方體之內部且滿足

$$\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}, \text{ 則 } P \text{ 點至直線 } AB \text{ 之距離為_____ . (化成最簡$$

分數)

**解答**  $\frac{5}{6}$

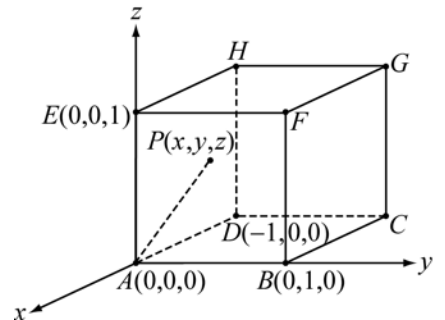
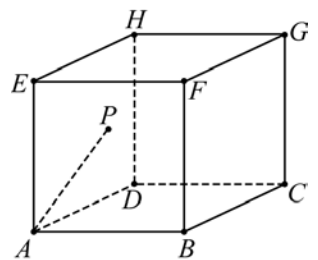
**解析** 令  $A(0, 0, 0), B(0, 1, 0), E(0, 0, 1), D(-1, 0, 0), P(x, y, z)$  如圖,

$$\text{則 } \vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE},$$

$$(x, y, z) = \frac{3}{4}(0, 1, 0) + \frac{1}{2}(-1, 0, 0) + \frac{2}{3}(0, 0, 1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$$

$$P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right) \text{ 到 } y \text{ 軸之投影點為 } Q\left(0, \frac{3}{4}, 0\right),$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}.$$





28. 如右圖，有一邊長為 1 的正立方體，今置頂點  $A$  於空間坐標系中之原點  $(0,0,0)$ ，置頂點  $B$  於正  $z$  軸上，則頂點  $C$  之  $z$  坐標為\_\_\_\_\_。

解答  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析

如圖，設  $C(x,y,z)$ ， $\because \overline{BD}=1$ ， $\overline{AD}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ ，

$\triangle ABD$  中， $\overline{AB}=\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$ ， $\therefore B(0,0,\sqrt{3})$ ，

$$\overline{AC}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{BC}^2 = x^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} : (z - \sqrt{3})^2 - z^2 = 1 \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

