高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.10.26					
範圍	2-1 空間基本概念(2)	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 5 分)

1、(C) 設 A,B,C 為空間中相異三點，且不在同一直線上，在空間中另取一點 D,使得 A,B,C,D 四點成為一平行四邊形的四個頂點，則這樣的 D 點一共有多少個？

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)無窮多個

解析：A,B,C,D 四點連成一平行四邊形必共平面，而在一平面上所成的平行四邊形有 ▱$ABCD$,▱$ABDC$,▱$ACBD$ 三個.

2、(E) 在空間中，下列敘述何者為真？

(A)平行於同一平面的兩條相異直線必互相平行

(B)相異三點可決定唯一的平面

(C)過直線 L 外一點 P 有無限多條直線與 L 垂直

(D)設直線 L 與平面 E 相交於 P 點，若 E 上有一條通過 P 點的直線與 L 垂直，則 L 與 E 垂直

(E)作一組兩兩距離均相等的點，則這組點在空間中最多可有四點

3、(B) 設 L_1，L_2 為二直線，且 L_1，L_2 均垂直 L 於點 P，則下列各敘述何者恆不真？

(A) $L_1=L_2$ (B) $L_1 // L_2$ (C) $L_1 \perp L_2$ (D) L_1 不垂直於 L_2 (E) L_1，L_2 可決定一平面

解析：$\because$ L_1 與 L_2 均垂直 L 於 P

$\therefore$ ←在平面上時，$L_1=L_2$

↑在空間上時，$L_1 \perp L_2$ 或 L_1 不垂直於 L_2 且 L_1 與 L_2 可決定一平面，故答案為(B)。

4、(B) 設 L_1，L_2 為二直線，E_1，E_2 為二平面，$L_1 \subset E_1$ 且 $L_2 \subset E_2$，則下列各敘述何者恆正確？ (A)若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$，則 $L_1 // L_2$

(B)若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 且 L_1 與 L_2 共面，則 $L_1 // L_2$

(C)若 E_1 與 E_2 有一交線，則 $L_1 // L_2$

(D)若 $L_1 // L_2$，則 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

(E)若 $L_1 \perp L_2$，則 $E_1 \perp E_2$

解析：(A)（╳）：不一定，可能為歪斜。

(B)（○）。

(C)（╳）：不一定，可能為歪斜或相交。

(D)（╳）：不一定，可能相交一直線。

(E)（╳）：不一定，可能相交一直線。

故選(B)。

二、多重選擇題 (每題 10 分)

1、(BCE) 下列各項之條件何者恰可決定一平面？

(A)相異三點 (B)一直線及此線外一點 (C)二相交直線

(D)二不相交直線 (E)二平行直線

解析：(A)不共線三相異點才可.(D)不能是一對歪斜線. 故選(B)(C)(E).

2、(ACDE) 空間中三相異平面可能將空間分割成幾個區域？

(A)4　(B)5　　(C)6　　(D)7　　(E)8

解析：(A)三平面互相平行時分成 4 個區域.

(C)三平面有二平行與另一平面各交於一直線或三平面交於一直線時分成 6 個區域.

(D)三平面兩兩交於一直線，且三交線不共點時分成 7 個區域.

(E)三平面交於一點時分成 8 個區域.

3、(ABDE) 下列有關空間的敘述何者正確？

(A)給定一直線 L 及 L 外一點 P ,恰有一直線通過 P 點且與 L 垂直

(B)給定一直線 L 及 L 外一點 P ,恰有一平面通過 P 點且與 L 垂直

(C)給定一直線 L 及 L 外一點 P ,恰有一平面通過 P 點且與 L 平行

(D)給定一直線 L 及 L 上一點 A ,恰有一平面通過 A 點且與 L 垂直

(E)若 L_1 與 L_2 為一對歪斜線，則恰可找到一平面包含 L_1 且與 L_2 平行

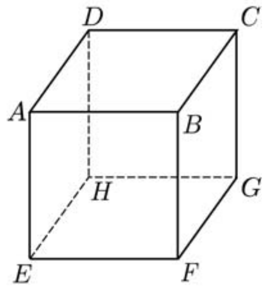
解析：(C)過 P 點而與 L 不相交的平面有無限多個.

4、(ABDE) 空間中一角(兩邊無限延伸)在一直線上之投影可能為下列何者？

(A)一點　(B)二點　　(C)一線段　(D)一射線　(E)一直線

解析：(C)因兩邊無限延伸, ∴不可能為一線段.

5、(BD) 右圖為長方體 $ABCDEFGH$,試問下列哪些線段會與 $\overline{AG}$ 共平面？



(A) $\overline{DE}$　(B) $\overline{DF}$　(C) $\overline{EF}$　(D) $\overline{BH}$　(E) $\overline{DH}$

解析：(A) $\overline{DE}$ 與 $\overline{AG}$ 歪斜.

(B) $\overline{DF}$ 與 $\overline{AG}$ 為二相交直線, ∴共平面.

(C) $\overline{EF}$ 與 $\overline{AG}$ 歪斜.

(D) $\overline{BH}$ 與 $\overline{AG}$ 交於一點, ∴共平面.

(E) $\overline{DH}$ 與 $\overline{AG}$ 歪斜.

6、(ADE) 下列哪些敘述是正確的？

(A)在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(B)在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(C)在平面上任意二相異直線一定有公垂線(仍在該平面上)

(D)在空間中，任意二相異直線一定有公垂線

(E)在空間中，相交的二相異平面一定有公垂面(公垂面指與該二平面都垂直的平面)

解析：(B)在空間中，可能平行，也可能歪斜.

(C)在平面上，二相交直線沒有公垂線.

(D)在空間中，不論相交、平行或歪斜皆有公垂線.

(E)空間中二相交平面交於一直線，作一平面與此直線垂直，則此平面即為兩平面的公垂面.

7、(BC) 已知空間中一直線 AB 與平面 E 交於 B 點，則下列哪些條件必使直線 AB 與平面 E 垂直？　(A)平面 E 上一直線 L_1 過 B 點且與直線 AB 垂直

(B)平面 E 上二相異直線 L_1, L_2 皆過 B 點且皆與直線 AB 垂直

(C)平面 E 上所有過 B 點的直線皆與直線 AB 垂直

(D)平面 E 上不過 B 點的一直線 L_1 與直線 AB 為一對歪斜線

(E)平面 E 上異於 B 的二相異點 C, D 滿足 $\angle ABC = \angle ABD = 90°$

$\boxed{\text{解析}}$：(A)平面 E 上另一過 B 的直線 L_2 未必與直線 AB 垂直.

(B)平面 E 上過 B 的二相異直線 L_1, L_2 與直線 AB 垂直，則可證出 E 上任一過 B 的其他直線皆與直線 AB 垂直.

(C)定義.

(D)與 L_1 成一對歪斜線的直線 AB 可以很多.

(E)若 B, C, D 三點共線則不垂直.

8、(AE) 下列有關空間的敘述，哪些是正確的？

(A)過已知直線外一點，恰有一平面與此直線垂直

(B)過已知直線外一點，恰有一平面與此直線平行

(C)過已知平面外一點，恰有一直線與此平面平行

(D)過已知平面外一點，恰有一平面與此平面垂直

(E)過已知平面外一點，恰有一平面與此平面平行

$\boxed{\text{解析}}$：(B)應為：過已知直線外一點，有無限多個平面與此直線平行.

(C)應為：過已知平面外一點，有無限多條直線與此平面平行.

(D)應為：過已知平面外一點，有無限多個平面與此平面垂直.

因此選(A)(E).

9、(全) 下列有關空間的敘述，哪些是正確的？

(A)平行同一直線之相異兩平面必平行

(B)垂直同一直線之相異兩平面必平行

(C)垂直同一平面之相異兩直線必平行

(D)平行同一直線之相異兩直線必平行

(E)相異三平面 E_1, E_2, E_3 兩兩相交於不同的三直線 L_1, L_2, L_3, 若 $L_1 // L_2$, 則 $L_2 // L_3$.

$\boxed{\text{解析}}$：皆正確.

10、(BDE)下列敘述何者正確？

(A)相異三點決定唯一平面

(B)一線及線外一點，決定唯一平面

(C)不相交的兩直線，決定唯一平面

(D)兩平行線，決定唯一平面

(E)相交於一點的兩直線，決定唯一平面

$\boxed{\text{解析}}$：(A)相異不共線三點，決定唯一平面

(C)歪斜線，不共平面

11、(AC)下列敘述何者正確？

(A)平行同一平面之相異兩平面必平行

(B)垂直同一平面之相異兩平面必平行

(C)平面 E_1 平行平面 E，平面 E_2 垂直平面 E，則平面 E_1 垂直平面 E_2

(D)垂直同一直線的相異兩直線必平行

(E)平行同一平面的相異兩直線必平行

$\boxed{\text{解析}}$：(B)此二平面可能相交於一直線

(C)垂直於同一直線之二直線，可能為歪斜線

(D)平行同一平面的二直線可能相交於一點，或是歪斜

12、(AC DE)下列敘述何者正確？

(A)垂直同一平面之相異兩直線必平行

(B)平行同一直線之相異兩平面必平行

(C)垂直同一直線之相異兩平面必平行

(D)平行同一直線之相異兩直線必平行

(E)相異三平面 E_1, E_2, E_3 兩兩相交於不同的三直線 L_1, L_2, L_3，若 $L_1 // L_2$ 則 $L_2 // L_3$

解析：(B)平行同一直線的相異兩平面可能相交於一直線

13、(AC D)下列敘述何者正確？

(A)直線上若有相異二點 A, B 都在平面 E 上，則 L 上的每一點，都在平面 E 上

(B)空間中，給予一直線 L 及線上一點 P，恰有一直線通過 P 點且垂直 L

(C)設一直線 L 交一平面 E 於一點 P，若 $L \perp E$ 於 P，則 E 上過 P 的任一直線都垂直於 L

(D)一直線 L 及線外一點 P，恰有一平面通過 P 點，且與直線 L 垂直

(E)設一直線 L 交一平面 E 於一點 P，若在 E 上有一直線 L_1 過 P 點，且 $L_1 \perp L$ 則 $L \perp E$

解析：(B)過一線 L 與線上一點 P，在空間中有無限多條直線通過 P 與 L 垂直。

(E)E 上要有 2 條相異直線 L_1, L_2 且 $L_1 \perp L$ ， $L_2 \perp L$ 則 $L \perp E$

14、(AB)平面 E 上有直線 L 及線外一點 B，A 在平面外一點，下列敘述何者正確？

(A)若 $\overline{AB} \perp$ 平面 E， $\overline{BC} \perp L$ 於 C 則 $\overline{AC} \perp L$ 於 C

(B)若 $\overline{AB} \perp$ 平面 E， $\overline{AC} \perp L$ 於 C 則 $\overline{BC} \perp L$ 於 C

(C)若 $\overline{BC} \perp L$ 於 C 且 $\overline{AC} \perp L$ 於 C 則 $\overline{AB} \perp$ 平面 E

(D)若 $\overline{BC} \perp L$ 於 C，$\overline{AB} \perp \overline{BC}$，$D$ 為 L 上異於 C 之點，則 $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$

(E)若 $\overline{AC} \perp L$ 於 C， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 於 B，則 $\overline{AB} \perp$ 平面 E

解析：$\because$ 若 $\overline{BC} \perp L$ 於 C， $\overline{AC} \perp L$ 於 C 且 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 於 B，則 $\overline{AB} \perp$ 平面 E。

15、(CD E)三相異平面兩兩相交於三條相異直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3。試問下列選項哪些絕不可能發生？

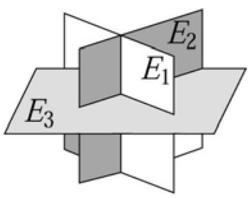
(A) $\overline{BC}$ 三線共交點　(B) $\overline{BC}$ 不共面，但 $\overline{AB}$　(C) $\overline{BC}$ 共平面

(D) $\overline{BC}$ 兩兩相交，但三交點相異　(E) $\overline{BC}$ 三線中兩兩都是歪斜線

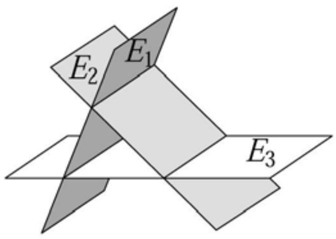
解析：$\because$ 圖形如下

圖一表三直線 $\overline{BC}$ 共交點

圖二表 $\overline{BC}$ 兩兩平行



圖一



圖二

16、(CD)在空間中，兩條歪斜線在平面上的投影圖形有下列哪幾種？（複選）

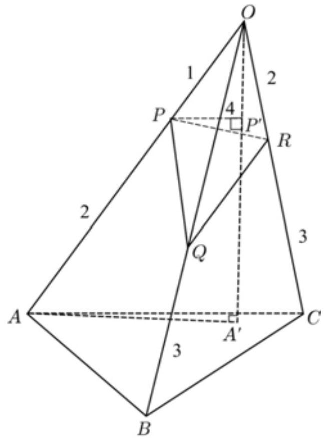
(A)二平行線　(B)重合二直線　(C)一直線與線外一點

(D)相交於一點的二直線　(E)一點

解析：投影圖形為二平行線或一直線與線外一點或相交於一點的二直線。

三、填充題 (每題 10 分)

1、 四面體$OABC$,在$\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}$上各取一點$P,Q,R$使$\overline{OP}:\overline{PA}=1:2$,$\overline{OQ}:\overline{QB}=4:3$,
$\overline{OR}:\overline{RC}=2:3$,則四面體$OPQR$之體積為四面體$OABC$之體積的______倍.



答案：$\dfrac{8}{105}$

解析：令$\angle BOC=\theta$,則

$\triangle OQR$面積$=\dfrac{1}{2}\overline{OQ}\cdot\overline{OR}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{7}\overline{OB}\cdot\dfrac{2}{5}\overline{OC}\sin\theta$

$=\dfrac{8}{35}\cdot\dfrac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OC}\sin\theta=\dfrac{8}{35}\triangle OBC$面積,

自P,A分別在面OBC作正射影於P',A', 則

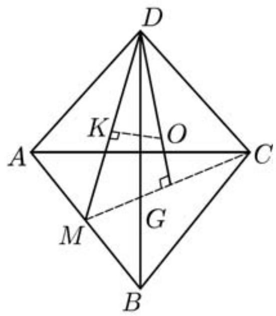
$\dfrac{\overline{PP'}}{\overline{AA'}}=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\overline{PP'}=\dfrac{1}{3}\overline{AA'}$,

$\therefore$四面體$OPQR$之體積$=\dfrac{1}{3}\triangle OQR$面積$\times\overline{PP'}$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{8}{35}\triangle OBC\times\dfrac{1}{3}\overline{AA'}$

$=\dfrac{8}{105}\times\dfrac{1}{3}\triangle OBC\times\overline{AA'}=\dfrac{8}{105}$四面體$OABC$.

2、稜長為 2 之正四面體的內切球半徑為______.



答案：$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

解析：設正四面體$ABCD$,$\triangle ABC$之重心G,$\triangle ABD$之重心K,

內切球球心為O,半徑為r, $\because G,K$皆為切點, $\therefore D,O,G$共線.

設M為$\overline{AB}$中點，則$\overline{DM}=\overline{MC}=\overline{AD}\sin 60°=\sqrt{3}$,

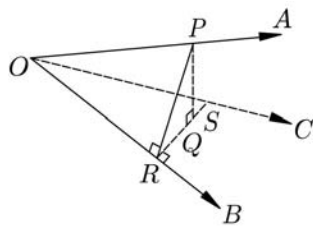
又$\overline{MG}=\dfrac{1}{3}\overline{MC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore\overline{DG}=\sqrt{\overline{DM}^2-\overline{MG}^2}=\sqrt{3-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,

$\because\overline{DK}=\dfrac{2}{3}\overline{DM}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,$\overline{OG}=\overline{OK}=r$,且$\overline{DO}^2=\overline{DK}^2+\overline{OK}^2$

$\Rightarrow(\overline{DG}-\overline{OG})^2=\overline{DK}^2+\overline{OK}^2$

$\Rightarrow(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-r)^2=(\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^2+r^2\Rightarrow\dfrac{8}{3}-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}r+r^2=\dfrac{4}{3}+r^2\Rightarrow\dfrac{4\sqrt{6}}{3}r=\dfrac{4}{3}$, $\therefore r=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

3、空間中三射線$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$兩兩夾角皆為$30°$,$P$為$\overrightarrow{OA}$上一點,$\overline{OP}=12$, P
在BOC面之投影為Q, $\overline{QR}\perp\overrightarrow{OB}$於$R$,直線$QR$交$\overrightarrow{OC}$於$S$則
(1)$\overline{RS}=$______. (2)若OAB面與OBC面之夾角θ,則$\cos\theta=$______.



答案：(1)6 (2)$2\sqrt{3}-3$

解析：$\because \overline{PQ}$ 垂直 OBC 面，又 $\overline{QR} \perp \overline{OB}$ 於 R，

由三垂線定理知 $\overline{PR} \perp \overline{OB}$ 於 R，$\therefore \overline{PR} = \overline{OP}\sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6, \overline{OR} = \overline{OP}\cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$，

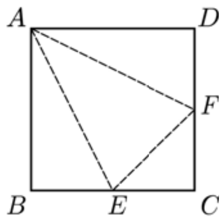
得 $\tan 30^\circ = \frac{\overline{RS}}{\overline{OR}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore \overline{RS} = 6\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 6$.

又 $\overline{OS} = \sqrt{\overline{OR}^2 + \overline{RS}^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2} = 12$，

$\therefore \overline{PS}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OS}^2 - 2\overline{OP} \cdot \overline{OS}\cos 30^\circ = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 144(2-\sqrt{3})$，

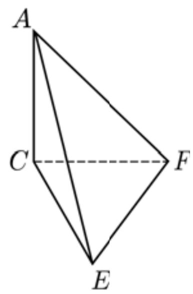
故 $\cos\theta = \cos\angle PRS = \frac{\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 - \overline{PS}^2}{2 \cdot \overline{PR} \cdot \overline{RS}} = \frac{6^2 + 6^2 - 144(2-\sqrt{3})}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{72(2\sqrt{3}-3)}{72} = 2\sqrt{3}-3$.

4、邊長為 2 的正方形 $ABCD$ 中，E, F 分別為 $\overline{BC}, \overline{CD}$ 中點，今以 $\overline{AE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ 為折線往上折，使 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$，$\overline{DF}$ 與 $\overline{CF}$，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CE}$ 接合，即 B, C, D 三點合在一起，成為一四面體，則此四面體體積＝______.



答案：$\frac{1}{3}$

解析：



折起後，以△CEF 為底面，如上圖，$B = C = D$，

$\because \angle ACE = \angle ACF = 90^\circ$，$\therefore \overline{AC}$ 垂直底面 CEF，

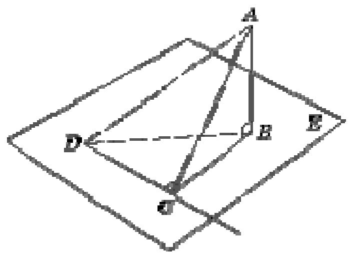
又 $\angle ECF = 90^\circ, \overline{CE} = \overline{CF} = 1, \overline{AC} = 2$，

$\therefore$ 體積$= \frac{1}{3}$△$CEF \times \overline{AC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$.

5、 設 $\overline{AB}$ 垂直平面 E 於 B，平面 E 上有 C, D 兩點且 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 於 C

(1)若 $\overline{AB} = 3$，$\overline{BC} = 4$，$\overline{BD} = 5$，則 $\overline{AD} =$_______，}

(2)若 $\overline{AB} = 3$，$\overline{BC} = 4$，$\overline{CD} = 12$，則 $\overline{AD} =$_______。



答案：$\sqrt{34}$, 13

解析：

(1)$\because \overline{AB} \perp$ 平面 E $\quad \therefore \overline{AB} \perp \overline{BD}$ $\quad \therefore \overline{AD} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

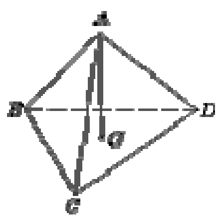
(2)由三垂線定理知 $\overline{AC} \perp \overline{CD}$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

$\therefore \overline{AC} = 5$ 　又 $\overline{CD} = 12$ $\therefore \overline{AD} = 13$

6、正四面體 $ABCD$，$\overline{AB} = 2$，則正四面體的高為_______，又其體積為_______。

答案：$\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}$

解析：

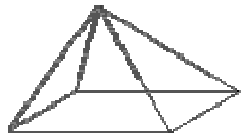


$\overline{AG} \perp$ 平面 BCD，G 為△BCD 的重心

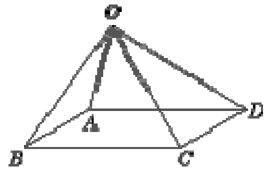
$\therefore \overline{BG} = \sqrt{3} \times \frac{2}{3}$，$\overline{AB} = 2$ $\quad \therefore \overline{AG} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

體積$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

7、如圖，有一個稜長均為 2 的金字塔形，設其正三角形的斜面中相鄰之二面的夾角為α，正三角形的斜面與正方形的底面之夾角為β，則 $\cos\alpha=$_______，$\cos\beta=$_______。



答案：$\dfrac{-1}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



解析：取$\overline{OC}$中點 M　$\therefore \overline{BM}\perp\overline{OC},\ \overline{DM}\perp\overline{OC}$

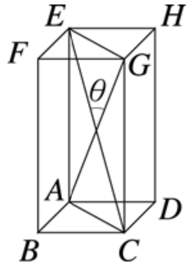
$\therefore \angle BMD=\alpha$，$\overline{BM}=\sqrt{3},\ \overline{DM}=\sqrt{3},\ \overline{BD}=2\sqrt{2}$

$\therefore \cos\alpha=\dfrac{3+3-8}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{-1}{3}$

取$\overline{CD}$中點 E，$\overline{AB}$中點 F　$\therefore \overline{EF}\perp\overline{CD},\ \overline{OE}\perp\overline{CD}$

$\therefore \beta=\angle OEF,\ \overline{OE}=\sqrt{3},\ \overline{EF}=2,\ \overline{OF}=\sqrt{3}$　$\therefore \cos\beta=\dfrac{3+4-3}{2\sqrt{3}\times 2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8、長方體（如圖）$ABCD$-$EFGH$，其中$\overline{AB}=1,\ \overline{AD}=2,\ \overline{AE}=4$，若$\overline{AG}$與$\overline{CE}$之一夾角為$\theta$，求$\sin\theta=$________。



答案：$\dfrac{8\sqrt{5}}{21}$

解析：自訂坐標，$A(0,0,0),G(1,2,4),C(1,2,0),E(0,0,4)$

$\therefore \overrightarrow{AG}=(1,2,4),\ \overrightarrow{CE}=(-1,-2,4)$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{AG}|\cdot|\overrightarrow{CE}|}=\dfrac{11}{\sqrt{21}\times\sqrt{21}}=\dfrac{11}{21}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\dfrac{320}{441}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{21}$