

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.10.07				
範圍	1-4 向量內積與應用	班級	二年____班	姓名
		座號		

一、填充題 (每題 10 分)

1. 設平面上兩直線 $L_1: 3x+4y=1$ 與 $L_2: 2x+y=1$ 所夾的銳角度量為 θ ，則 $\cos\theta =$ _____。

解答 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析 $\vec{n}_1 = (3, 4), \vec{n}_2 = (2, 1), \cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1|}{5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

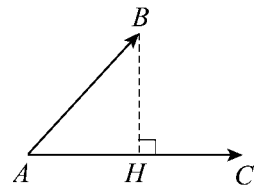
2. 平面上三點 $A(1, 2), B(4, 6), C(3, 3)$ 則

(1) \vec{AB} 在 \vec{AC} 方向上的正射影為_____；

(2) B 點在直線 \vec{AC} 上的投影點之坐標為_____。

解答 (1) $(4, 2); (2) (5, 4)$

解析 (1) $\vec{AB} = (3, 4), \vec{AC} = (2, 1)$



\vec{AB} 在 \vec{AC} 之正射影為 $\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|^2} \right) \vec{AC} = \frac{6+4}{5} (2, 1) = (4, 2)$ 。

(2) 令投影點 $H(x, y)$, $\vec{AH} = (4, 2) \Rightarrow (x-1, y-2) = (4, 2) \Rightarrow (x, y) = (5, 4), H(5, 4)$ 。

3. 求兩直線 $L_1: 2x+y+1=0$ 及 $L_2: \begin{cases} x=-2+t \\ y=3t \end{cases}$, t 為實數的銳夾角為_____。

解答 45°

解析 $\vec{N}_1 = (2, 1), \vec{V}_2 = (1, 3) \Rightarrow \vec{N}_2 = (3, -1)$,

$\therefore \cos\theta = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{|6-1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \therefore$ 銳夾角 $\theta = 45^\circ$ 。

4. 設 $A(1, 2), C(3, 4), \overline{AB} = 6$, \vec{AB} 與 \vec{AC} 的夾角為 $\frac{3\pi}{4}$, 則 B 點在 \vec{AC} 上的投影點_____。

解答 $(-2, -1)$

解析 設 B 在 \vec{AC} 上的投影點為 $B'(x, y)$, 則 $\vec{AB}' = \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|^2} \right) \vec{AC}$

$$\Rightarrow (x-1, y-2) = \frac{6 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{4}}{\sqrt{8}} (2, 2) \Rightarrow (x-1, y-2) = (-3, -3), \therefore B'(x, y) = (-2, -1).$$

5. $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (p, q)$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, 則 $ap + bq$ 的最小值為_____.

解答 -6

解析 SOL 一

$$ap + bq = \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 \cdot \cos \theta = 6 \cos \theta, \therefore ap + bq \text{ 的最小值為 } -6.$$

SOL 二

$$|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4, p^2 + q^2 = 9$$

科西不等式: $(ap + bq)^2 \leq (a^2 + b^2)(p^2 + q^2)$

$$(ap + bq)^2 \leq 4 \cdot 9 \Rightarrow -6 \leq ap + bq \leq 6; \therefore ap + bq \text{ 的最小值為 } -6$$

6. $4\sec^2 \theta + 9\csc^2 \theta$ 的最小值為_____.

解答 25

解析 $4\sec^2 \theta + 9\csc^2 \theta = \frac{4}{\cos^2 \theta} + \frac{9}{\sin^2 \theta},$

$$\therefore (2+3)^2 \leq \left[\left(\frac{2}{\cos \theta} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sin \theta} \right)^2 \right] [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta],$$

$$25 \leq \left[\frac{4}{\cos^2 \theta} + \frac{9}{\sin^2 \theta} \right], \therefore 4\sec^2 \theta + 9\csc^2 \theta = \frac{4}{\cos^2 \theta} + \frac{9}{\sin^2 \theta} \text{ 最小值為 } 25.$$

7. 已知 x, y 為實數, $x^2 + y^2 = 16$, 則 $3x - 4y$ 的最小值為 m , 此時 x 值為 k , 則數對 $(m, k) =$

解答 $\left(-20, -\frac{12}{5} \right)$

解析 $(3x - 4y)^2 \leq (x^2 + y^2)[3^2 + (-4)^2] \Rightarrow (3x - 4y)^2 \leq 16 \cdot 25 \Rightarrow -20 \leq 3x - 4y \leq 20, m = -20,$

$$\text{此時 } \frac{x}{3} = \frac{y}{-4} = t \Rightarrow x = 3t, y = -4t, \text{ 又 } 3x - 4y = -20, 9t + 16t = -20 \Rightarrow t = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore x = -\frac{12}{5}, y = \frac{16}{5}, \text{ 故 } (m, k) = \left(-20, -\frac{12}{5} \right).$$

8. 設 x 、 y 為實數， $x^2 + 4y^2 = 5$ ，則

(1) $3x + 2y$ 的最大值 = _____；(2) 當 $3x + 2y$ 取最大值時， $(x, y) =$ _____。

解答 (1) $5\sqrt{2}$ ；(2) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

解析 (1) $(3x + 2y)^2 \leq [x^2 + (2y)^2][3^2 + 1^2] \Rightarrow (3x + 2y)^2 \leq 5 \times 10 \Rightarrow -5\sqrt{2} \leq 3x + 2y \leq 5\sqrt{2}$ ，

$\therefore 3x + 2y$ 的最大值為 $5\sqrt{2}$ 。

(2) “=” 成立時 $\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{2y}{1}$ ，設 $\frac{x}{3} = \frac{2y}{1} = t \Rightarrow x = 3t$ ， $y = \frac{t}{2}$ 代入 $3x + 2y = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow 9t + t = 5\sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\therefore (x, y) = \left(3t, \frac{t}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 。

9. 設 $3x + 4y = 1$ ， x 、 y 為實數，則 $\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$ 的最小值為 _____。

解答 6

解析 $\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$ 的最小值即 $(5, 4)$ 到直線 $3x + 4y - 1 = 0$ 的距離，

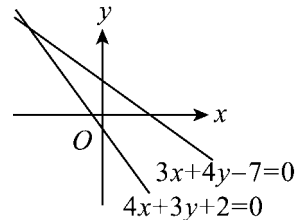
\therefore 所求 = $\frac{|15 + 16 - 1|}{5} = 6$ 。

10. 兩直線 $3x + 4y - 7 = 0$ 與 $4x + 3y + 2 = 0$ 所夾銳角的平分線的方程式為 _____。

解答 $7x + 7y - 5 = 0$

解析

所求： $\frac{3x + 4y - 7}{5} = -\frac{4x + 3y + 2}{5}$ (異號區) $\Rightarrow 7x + 7y - 5 = 0$ 。



11. 直線 L 通過點 $P(0, 3)$ 且與直線 $3x + 4y - 12 = 0$ 的夾角為 45° ，則 L 的方程式為 _____。

解答 $x - 7y = -21$ 或 $7x + y = 3$

解析 SOL 一

設 $L: y - 3 = mx \Rightarrow L: mx - y + 3 = 0$

$\Rightarrow \cos \theta = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} \Rightarrow \cos 45^\circ = \pm \frac{(m, -1) \cdot (3, 4)}{\sqrt{m^2 + 1} \cdot 5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{3m - 4}{5\sqrt{m^2 + 1}}$ ，

$2(9m^2 - 24m + 16) = 25m^2 + 25 \Rightarrow 7m^2 + 48m - 7 = 0 \Rightarrow (7m - 1)(m + 7) = 0$ ，

$\therefore m = \frac{1}{7}$ 或 -7 ，故 $L: x - 7y = -21$ 或 $7x + y = 3$ 。

SOL 二

設 $L: y-3=mx$; $3x+4y-12=0$ 的斜率 $-\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \tan 45^\circ = \pm \frac{m - (-\frac{3}{4})}{1 + m(-\frac{3}{4})} \Rightarrow 1 = \pm \frac{4m+3}{4-3m} ; 4-3m = \pm(4m+3)$$

$\therefore m = \frac{1}{7}$ 或 -7 , 故 $L: x-7y=-21$ 或 $7x+y=3$.

12. $\vec{a} = (x, 2)$, $\vec{b} = (1, y)$, x, y 為實數, 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$, 則 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 之最小值為_____.

解答 $2\sqrt{5}$

解析 $\because \vec{a} \cdot \vec{b} = x+2y = -5$, $\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = |(x-1, 2-y)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$,

由柯西不等式:

$$[1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-2)]^2 \leq [(x-1)^2 + (y-2)^2][1^2 + 2^2] \Rightarrow \frac{100}{5} \leq (x-1)^2 + (y-2)^2,$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| \geq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

13. 設直線 L 通過點 $(-2, -3)$ 且與向量 $\vec{u} = (1, 2)$ 垂直, 則直線 L 的方程式為_____.

解答 $x+2y+8=0$

解析 設所求為 $x+2y+k=0$,

$$(-2, -3) \text{ 代入得 } -2-6+k=0 \Rightarrow k=8, \therefore L: x+2y+8=0.$$

14. 若 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=4$ 且 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 則 \vec{b} 在 \vec{c} 方向上的投影量 =_____.

解答 $-\frac{21}{8}$

解析 $\because |\vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a}|$, $\therefore |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2$

$$\Rightarrow 9+16+2\vec{b} \cdot \vec{c} = 4 \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{21}{2},$$

$$\therefore \vec{b} \text{ 在 } \vec{c} \text{ 方向上的投影量} = |\vec{b}| \cos \theta = |\vec{b}| \cdot \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-\frac{21}{2}}{4} = -\frac{21}{8}.$$

15. (1) 過點 $(-1, 5)$, 斜率為 $-\frac{3}{2}$ 的直線 L 參數式為_____;

(2) 該直線 L 與 $3x+2y+1=0$ 的距離為_____.

解答 (1) $L: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$, t 為實數; (2) $\frac{8\sqrt{13}}{13}$

解析 (1) $m = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ 一方向向量 $\vec{V}_L = (2, -3)$, $\therefore L: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$, t 為實數.

(2) $L: 3x + 2y - 7 = 0$, $\therefore d = \frac{|7+1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$.

16. 設原點到直線 $L: \frac{1}{\sqrt{a}}x + \frac{2}{\sqrt{b}}y = 4$ 的距離為 $d = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{4}{b}}}$, 則

(1) 正數 $k =$ _____; (2) 若 $a + b = 1$, 則 d 之最大值為 _____.

解答 (1) 4; (2) $\frac{4}{3}$

解析 (1) $d = \frac{|0+0-4|}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{4}{b}}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{4}{b}}}$, $\therefore k = 4$.

(2) $\left(\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{2}{\sqrt{b}}\right)^2 \leq \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2\right] \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right)^2\right]$

$\Rightarrow 9 \leq \frac{1}{a} + \frac{4}{b} \Rightarrow 3 \leq \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{4}{b}} \Rightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{4}{b}}}$, $\therefore d = \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{4}{b}}} \leq \frac{4}{3}$, \therefore 最大值為 $\frac{4}{3}$.

17. 若 $|\vec{a}| = 5$, 且 $\vec{a} \perp (-1, 2)$, 則 $\vec{a} =$ _____.

解答 $\pm(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$

解析 $\vec{a} = \pm 5 \cdot \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}} = \pm(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

18. 設 $\vec{u} = (7, 1)$ 且直線 $L: 3x - y + 102 = 0$, 則 \vec{u} 在 L 上的正射影為 _____.

解答 (1, 3)

解析 L 之法向量 $\vec{N} = (3, -1)$, 取方向向量 $\vec{v} = (1, 3)$,

\vec{u} 在 \vec{v} 之正射影為 $\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) \vec{v} = \frac{7+3}{(\sqrt{10})^2} (1, 3) = (1, 3)$.

19. 給三直線 $L_1: 3x + 4y - 5 = 0$, $L_2: 4x - 3y - 65 = 0$, $L_3: 7x - 24y + 55 = 0$, L_1 與 L_2 , L_2 與 L_3 , L_3 與 L_1 之交點依次為 A 、 B 、 C , 則

(1) $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 的內角平分線方程式為 _____; (2) $\triangle ABC$ 之內心為 _____.

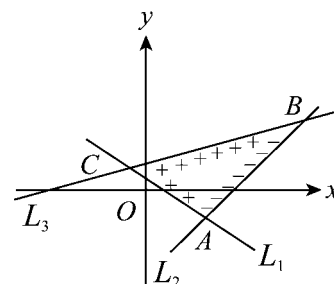
解答 (1) $7x + y - 70 = 0$; (2) (10, 0)

解析

$$(1) \angle BAC \text{ 內角分角線: } \frac{4x-3y-65}{5} = -\frac{3x+4y-5}{5} \text{ (異號區)} \Rightarrow 7x+y-70=0 .$$

$$(2) \angle ABC \text{ 之內角分角線: } \frac{7x-24y+55}{25} = -\frac{4x-3y-65}{5} \text{ (異號區)} \Rightarrow 9x-13y-90=0 ,$$

$$\therefore I : \begin{cases} 7x+y-70=0 \\ 9x-13y-90=0 \end{cases} \Rightarrow I(10,0) .$$



20. 設 $x > 0$, $y > 0$ 且 $x + y = 6$, 則 $\frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ 的最小值為_____.

解答 $\frac{25}{6}$

解析

$$\begin{aligned} \left[\left(\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{3}{\sqrt{y}} \right) \right]^2 &\leq \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \right] \left[\left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{y}} \right)^2 \right] \\ \Rightarrow (2+3)^2 &\leq [x+y] \left[\frac{4}{x} + \frac{9}{y} \right] \\ \Rightarrow 25 &\leq 6 \left(\frac{4}{x} + \frac{9}{y} \right), \therefore \frac{4}{x} + \frac{9}{y} \text{ 最小值為 } \frac{25}{6} . \end{aligned}$$

21. 設 $A(3, 2)$, $B(1, 4)$ 及直線 $L: y = mx - 6$, 若 \overline{AB} 與 L 交於 P 且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$, 則 $m =$ _____.

解答 4

$$\begin{aligned} \text{解析 } \overline{AP} : \overline{PB} &= \frac{|3m-8|}{\sqrt{m^2+1}} : \frac{|m-10|}{\sqrt{m^2+1}} = |3m-8| : |m-10| = 2 : 3 \\ \Rightarrow 2|m-10| &= 3|3m-8| \Rightarrow 77m^2 - 352m + 176 = 0 \Rightarrow 7m^2 - 32m + 16 = 0 \\ \Rightarrow (m-4)(7m-4) &= 0, \quad m = 4 \text{ 或 } \frac{4}{7}, \end{aligned}$$

但 $\frac{4}{7}$ 代入使 A, B 同側 (不合), 故 $m = 4$.

22. 設 P 在由 x 軸, y 軸與 $4x + 3y = 12$ 所成的區域內且 $\overline{OP} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (O 為原點), 求 P 點到此三直線距離和的最大值為_____.

解答 $\frac{29}{10}$

解析 由題意 P 在第一象限, 設 $P(x, y)$, 則

$$P \text{ 到三直線距離和} = |x| + |y| + \frac{|4x+3y-12|}{5} = x + y + \frac{-(4x+3y-12)}{5} = \frac{1}{5}(x+2y+12),$$

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{5}{4}, \text{ 又 } (x+2y)^2 \leq (x^2 + y^2)(1^2 + 2^2),$$

$$(x+2y)^2 \leq \frac{5}{4} \cdot 5 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x+2y \leq \frac{5}{2}, \therefore \text{最大值爲 } \frac{1}{5} \left(\frac{5}{2} + 12 \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{29}{2} = \frac{29}{10} .$$

23. 設 x, y 爲實數, 若 $4x-3y=14$, 則

(1) $4x^2+9y^2-4x+12y+5$ 的最小值爲 _____; (2) 此時數對 $(x, y) =$ _____ .

解答 (1) 20; (2) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{4}{3}\right)$

解析 (1) $\because 4x^2+9y^2-4x+12y+5 = (2x-1)^2 + (3y+2)^2$,

利用柯西不等式:

$$\left[2(2x-1) + (-1)(3y+2) \right]^2 \leq \left[(2x-1)^2 + (3y+2)^2 \right] \left[2^2 + (-1)^2 \right]$$

$$\Rightarrow (4x-3y-4)^2 \leq \left[(2x-1)^2 + (3y+2)^2 \right] \times 5,$$

$$(14-4)^2 \leq \left[(2x-1)^2 + (3y+2)^2 \right] \times 5$$

$$\therefore (2x-1)^2 + (3y+2)^2 \geq 20, \therefore 4x^2+9y^2-4x+12y+5 \text{ 最小值爲 } 20 .$$

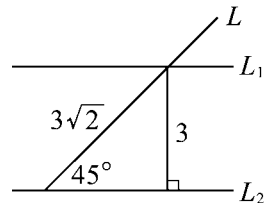
(2) 此時 $\frac{2x-1}{2} = \frac{3y+2}{-1} = t \Rightarrow x = \frac{2t+1}{2}, y = \frac{-t-2}{3}$,

代入 $4x-3y=14$, $\therefore t=2$, $\therefore (x, y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{4}{3}\right)$.

24. 一直線 L 經過點 $P(1, 2)$ 且和兩條平行直線 $L_1: 3x+4y+10=0$, $L_2: 3x+4y-5=0$ 都相交, 又兩交點間線段的長爲 $3\sqrt{2}$, 則直線 L 之方程式 _____ .

解答 $x-7y+13=0$ 或 $7x+y-9=0$

解析 $\because d(L_1, L_2) = \frac{15}{5} = 3$, $\therefore L$ 與 L_1 夾 45° ,



$$\tan 45^\circ = \pm \frac{m + \frac{3}{4}}{1 + m \left(-\frac{3}{4}\right)} \Rightarrow 1 = \frac{\pm(4m+3)}{4-3m} \Rightarrow 4-3m = 4m+3 \text{ 或 } 4-3m = -4m-3,$$

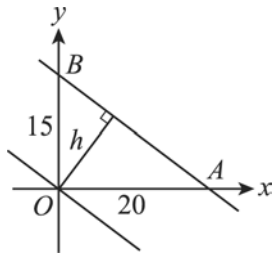
$$\therefore m = \frac{1}{7} \text{ 或 } m = -7, \text{ 故 } L: x-7y+13=0 \text{ 或 } 7x+y-9=0 .$$

25. 坐標平面上有兩條平行直線. 它們的 x 截距相差 20, y 截距相差 15. 則這兩條平行直線的距離爲 _____ .

解答 12

解析 如圖, $\triangle OAB$ 中 $\overline{AB} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$

$$\triangle OAB \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 15 \times 20 = \frac{1}{2} \times 25 \times h, \quad h=12 \quad \text{表示二平行直線的距離爲 } 12 .$$



26. 平面上兩點 $A(2, 2)$, $B(10, -4)$, 求

(1) 若線段 \overline{AB} 的參數式為 $\begin{cases} x = 6 + 4t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$, 則 t 的範圍為_____;

(2) $P(1, 1)$ 至 \overleftrightarrow{AB} 的距離為_____.

解答 (1) $-1 \leq t \leq 1$; (2) $\frac{7}{5}$

解析 (1) $\overrightarrow{AB} = (10 - 2, -4 - 2) = (8, -6) = 2(4, -3)$, 且 $(6, -1)$ 為 \overline{AB} 中點

\overline{AB} 的參數式為 $\begin{cases} x = 6 + 4t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$, 當 $t = -1, A(2, 2); t = 1, B(10, -4) \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$.

(2) $\overleftrightarrow{AB} : 3x + 4y - 14 = 0$, $\therefore d(P, \overleftrightarrow{AB}) = \frac{|3 + 4 - 14|}{5} = \frac{7}{5}$.