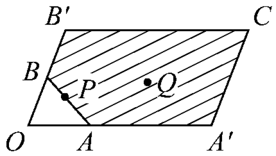
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：99.09.23

範圍	1-2 向量的基本應用	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、選擇題　（ 每題分 ）

（　　　）1.(多選)如圖示，A' 與 B' 分別為射線 $\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{OB}$ 上的點，$\overline{OA'}=3\overline{OA}$，$\overline{OB'}=2\overline{OB}$，今作平行四邊形 $OA'CB'$．已知 P 為線段 $\overline{AB}$ 上的一點，而 Q 為斜線區域內的一點，設 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，



$\overrightarrow{OQ}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$，則下列敘述何者為真？

(1) $x<0$，$y<0$　(2) $x+y=1$　(3) $0\le r\le 3$　(4) $1\le s\le 2$　(5) $r+s\le 1$．

解答　23

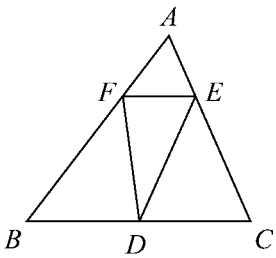
解析　$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}\Rightarrow x+y=1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，

$\overrightarrow{OQ}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$，則斜線區域為 $r+s\ge 1$ 且 $0\le r\le 3$ 且 $0\le s\le 2$，

當 $r=\frac{3}{2}$，$s=0$，即 $\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ 落在斜線區域內，但 $s=0$，∴(4)(5)不正確

二、填充題　（ 每題 10 分 ）

1. 在△ABC 之三邊上分別取 D、E、F 三點，使 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，且 D 為 $\overline{BC}$ 之中點，若 G 為△DEF 之重心且 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$________．又△DEF 與△ABC 面積比值為____________。



解答　$(\frac{5}{18},\frac{5}{18})$；

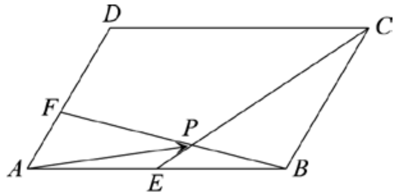
解析

∵ G 為△DEF 之重心，

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{18}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore x=\frac{5}{18}$，$y=\frac{5}{18}$．

2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，E 為 $\overline{AB}$ 中點，F 點在 $\overline{AD}$ 上，且 $\overline{AF}:\overline{FD}=2:3$，若 $\overline{BF}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 P，如圖



(1)若 $\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{AC}$，求實數 t．

(2)求$\overline{CP}:\overline{PE}$.

解答 (1)$t=\dfrac{1}{6}$;(2)$5:1$

解析

(1) $\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{AC}=(1-t)(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})+t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\dfrac{1-t}{2}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}=\dfrac{1+t}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5t}{2}\overrightarrow{AF}$， 可知：$\dfrac{1+t}{2}+\dfrac{5t}{2}=1$，即$t=\dfrac{1}{6}$，

所以$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

(2)由(1)$\overline{CP}:\overline{PE}=5:1$.

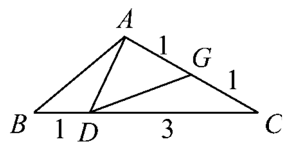
3. $\triangle ABC$中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=3$，則(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________；(2)$\left|3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right|=$____________.

解答 (1)1; (2)$\sqrt{105}$

解析 (1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}=\dfrac{3^2+3^2-4^2}{2}=1$.

(2)$\sqrt{\left|3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right|^2}=\sqrt{9\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}=\sqrt{9\cdot 9-12\cdot 1+4\cdot 9}=\sqrt{105}$.

4. $\triangle ABC$中，D爲$\overline{BC}$上一點且$\overline{CD}=3\overline{BD}$，$G$爲$\overline{AC}$中點，若$\overrightarrow{GD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，$r$、$s$爲實數，則數對$(r,s)=$____________ .

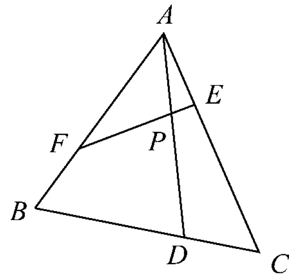


解答 $\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$

解析

$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}=\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故$(r,s)=\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$.

5. 如圖，D、E、F依次分別爲$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上的點，$\overline{AF}$ ：$\overline{FB}=\overline{BD}$ ：$\overline{DC}=\overline{CE}$ ：$\overline{EA}=2$ ：1，而$\overline{AD}$與$\overline{EF}$交於P，設$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對$(x,y)=$____________ .



解答 $\left(\dfrac{2}{15},\dfrac{4}{15}\right)$

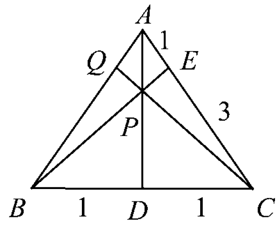
解析 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

設$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}t\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}t\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}t\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AF}\right)+\dfrac{2}{3}t\left(3\overrightarrow{AE}\right)=\left(\dfrac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AF}+(2t)\overrightarrow{AE}$，

$\because F$、P、E三點共線，$\therefore\dfrac{1}{2}t+2t=1\Rightarrow t=\dfrac{2}{5}$，

$\because \overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$，$\therefore (x,y)=\left(\frac{2}{15},\frac{4}{15}\right)$．

6. △ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 中點，E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}$ ：$\overline{EC}=1$ ：3，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BE}$ 於點 P，$\overline{CP}$ 之延長線與 $\overline{AB}$ 交於 Q 點，則



(1)若 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，則數對 $(x,y)=$____________；

(2) $\overline{CP}$ ：$\overline{PQ}=$____________．

解答 (1)$\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$；(2)4：1

解析

(1) $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，$\begin{cases}\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\left(2\overrightarrow{CD}\right)\\ \overrightarrow{CP}=x\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{CE}\right)+y\overrightarrow{CB}\end{cases}$，

$\because A$、P、D 共線且 B、P、E 共線，$\therefore \begin{cases}x+2y=1\\ \frac{4}{3}x+y=1\end{cases}\Rightarrow (x,y)=\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$．

(2)設 $\overrightarrow{CQ}=t\overrightarrow{CP}=\frac{3t}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{t}{5}\overrightarrow{CB}$

$\because A$、Q、B 共線，$\therefore \frac{3t}{5}+\frac{t}{5}=1\Rightarrow t=\frac{5}{4}$，即 $\overrightarrow{CQ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CP}$，故 $\overline{CP}$ ：$\overline{PQ}=4$ ：1．

7. 設 G 為△ABC 之重心，求

(1)若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}$，則數對 $(x,y)=$____________；

(2)若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{CA}$，則數對 $(x,y)=$____________．

解答 (1)$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$;(2)$\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

解析

(1) G 為△ABC 之重心，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\therefore (x,y)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$．

(2)由(1)，$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，$\therefore (x,y)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$．

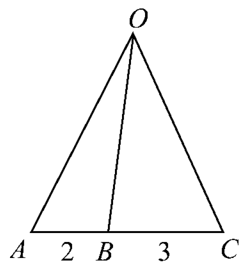
8. 直線上三點 A、B、C，$A-B-C$，若 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$，$O$ 爲任一點，求

(1)若 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$，則數對 $(x,y)=$____________;

(2)若 $\overrightarrow{OB}=h\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OC}$，則數對 $(h,k)=$____________ .

解答 (1) $\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$;(2) $\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$

解析



$\because 3\overline{AB}=2\overline{BC}\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{2}{3}$，由分點公式 $\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$，

$\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，

$\therefore$(1) $(x,y)=\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$.　(2) $(h,k)=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$.

9. A、B、C 三點不共線，x、y 爲實數，若 $(x+1)\overrightarrow{AB}+(3y-6)\overrightarrow{AC}+(2x-y)\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$，則數對 $(x,y)=$ _____ .

解答 $(2,1)$

解析

$$(x+1)\overrightarrow{AB}+(3y-6)\overrightarrow{AC}+(2x-y)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{0}\text{，}$$

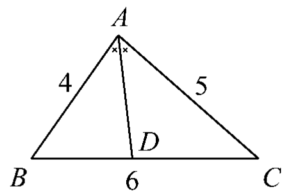
$$(x+1-2x+y)\overrightarrow{AB}+(3y-6+2x-y)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\text{，}$$

$$\therefore\begin{cases}-x+y=-1\\2x+2y=6\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\text{，}\therefore(x,y)=(2,1)\text{ .}$$

10. 若 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$ 且 $\angle A$ 的角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，則 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=$________ .

解答 $\frac{10}{3}$

解析



$\because\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{4}{5}$，　$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$，

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{25}{81}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{40}{81}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{16}{81}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$=\frac{25}{81}\cdot16+\frac{40}{81}\left(4\cdot5\cdot\frac{16+25-36}{2\cdot4\cdot5}\right)+\frac{16}{81}\cdot25=\frac{900}{81}=\frac{100}{9}\text{，}\therefore\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{10}{3}\text{ .}$$

11. I 爲 $\triangle ABC$ 的內心，$a=3$，$b=6$，$c=5$，若 $\overrightarrow{BI}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，則數對 $(x,y)=$____________ .

解答 $\left(\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right)$

解析

$$\overrightarrow{BI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{BA}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{14}\overrightarrow{BA}+\frac{5}{14}\overrightarrow{BC}，\therefore(x,y)=\left(\frac{3}{14},\frac{3}{7}\right).$$

12. 在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=6$，H是$\triangle ABC$的垂心，且$\overrightarrow{AH}$交$\overline{BC}$於D，求:

(1) 若$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$x$，$y\in\boldsymbol{R}$，則數對$(x,y)=?$

(2) 若$\overrightarrow{AD}=\ell\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$，$\ell$，$m\in\boldsymbol{R}$，則數對$(\ell,m)=?$

解答 (1) $(\frac{3}{35},\frac{1}{7})$;(2) $(\frac{3}{8},\frac{5}{8})$

解析

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2}=\dfrac{5}{2}$

H是$\triangle ABC$的垂心$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot x+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\,y\\\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\,x+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\,y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}25x+\frac{5}{2}y=\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}x+16y=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow y=\frac{1}{7}，x=\frac{3}{35}\quad\therefore(x,y)=(\frac{3}{35},\frac{1}{7})$

(2) 設$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AH}=t(\frac{3}{35}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC})=\frac{3t}{35}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{7}\overrightarrow{AC}$

$\because$ D，B，C三點共線 $\therefore$ $\frac{3t}{35}+\frac{t}{7}=1$ $\Rightarrow$ $t=\frac{35}{8}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$， 即$(\ell,m)=(\frac{3}{8},\frac{5}{8})$

13. 設$\triangle ABC$中，G爲重心，且$\overline{GA}=1$，$\overline{GB}=\sqrt{2}$，$\overline{GC}=2$，

(1)求$\left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$． (2)求$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$．

解答 (1) 0;(2) $\frac{1}{2}$

解析 (1)G爲$\triangle ABC$的重心，得$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$， 得$\left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=0$．

(2)由$\left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right|^2=\left|-\overrightarrow{GC}\right|^2\Rightarrow\left|\overrightarrow{GA}\right|^2+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\left|\overrightarrow{GB}\right|^2=\left|\overrightarrow{GC}\right|^2$

$\Rightarrow1+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+2=4\Rightarrow\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{1}{2}$．

14. 設 I 爲 $\triangle ABC$ 之內心，若 $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ 且 $\triangle ABC$ 周長爲 48，求 $\triangle ABC$ 之面積．

解答　96

解析　$\because\ 3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0} \Rightarrow\ a:b:c=3:4:5$

又周長爲 48　$\therefore\ a=12$，$b=16$，$c=20$，故直角 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 12\times 16=96$