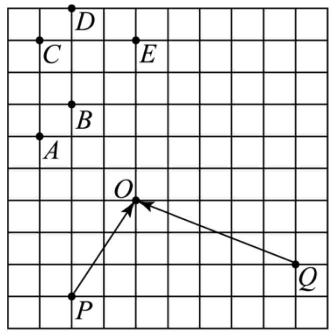
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：99.09.09					
範圍	1-1 向量的基本應用	班級	二年____班	姓名	
		座號			

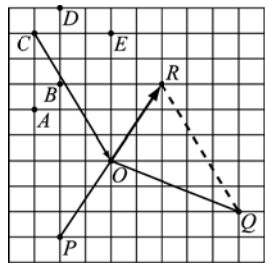
一、單選題 （ 每題分 ）

（　　　）1.如圖，下面哪一選項中的向量與另兩個向量 $\overrightarrow{PO}$ 、 $\overrightarrow{QO}$ 之和等於零向量? (1) $\overrightarrow{AO}$ (2) $\overrightarrow{BO}$ (3) $\overrightarrow{CO}$ (4) $\overrightarrow{DO}$ (5) $\overrightarrow{EO}$.



解答 3

解析

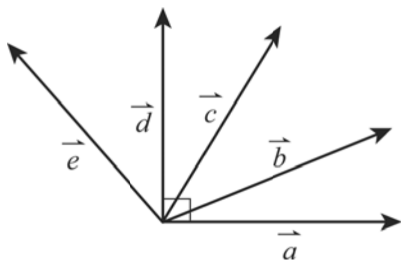


由圖 $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{QR}$ ，

$\therefore \overrightarrow{CO}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{0}$.

（　　　）2.下圖為五個等長的向量，試問向量 $\overrightarrow{a}$ 與下列哪一個向量的內積最大?

(1) $\overrightarrow{a}$ (2) $\overrightarrow{b}$ (3) $\overrightarrow{c}$ (4) $\overrightarrow{d}$ (5) $\overrightarrow{e}$.



解答 1

解析 內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 即 $\overrightarrow{a}$ 的長度 $\left|\overrightarrow{a}\right|$ 與 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 方向上的投影量之乘積，又 $\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{b}$ ， $\overrightarrow{c}$ ， $\overrightarrow{d}$ 與 $\overrightarrow{e}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 方向上的 5 個投影量中，以 $\overrightarrow{a}$ 的投影量最大， $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}$ 最大．故選(1)．

二、填充題 （ 每題 10 分 ）

1. 設 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ 且 $\left|\overrightarrow{a}\right|=4$ ， $\left|\overrightarrow{b}\right|=2$ ，若 $\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 60° ，則 $\left|\overrightarrow{c}\right|=$ ____________ .

解答 $4\sqrt{3}$

解析 $\because \overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ ， $\therefore \overrightarrow{c}=-\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$

$\left|\overrightarrow{c}\right|^2=\left|-\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2+4\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos 60^\circ=16+16+4\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{2}=48$ ，

$\therefore \left|\overrightarrow{c}\right|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

2. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 滿足條件： $\left|\vec{a}\right|=1$ ， $\left|\vec{b}\right|=2$ ， $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ ，求

(1)設 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夾角 θ ，則 $\cos\theta=$____________； (2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$____________ .

解答 (1) $\frac{1}{4}$;(2) $\sqrt{6}$

解析 (1) $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 \Rightarrow 4\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow 4+4-4\vec{a}\cdot\vec{b}=1+4+2\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 2}=\frac{1}{4}$.

(2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+4+2\cdot\frac{1}{2}=6$ ， $\therefore \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{6}$.

3. 已知 $\left|\vec{a}\right|=4$ ， $\left|\vec{b}\right|=3$ ， $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角為 60° ，求

(1) $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ 的最小值為____________； (2)此時 $t=$____________ .

解答 (1) $2\sqrt{3}$;(2) $-\frac{2}{3}$

解析 $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2$

$=4^2+2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos 60^\circ\cdot t+3^2\cdot t^2=9t^2+12t+16 \quad =9\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+12$

當 $t=-\frac{2}{3}$ 時，可得最小值為 $2\sqrt{3}$.

4. 設 $\left|\vec{a}\right|=3$ ， $\left|\vec{b}\right|=5$ ， $\left|\vec{c}\right|=7$ ，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ，求： $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 之值 .____________

解答 $-\frac{65}{2}$

解析 (1) $\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ， $\therefore \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$ ， $|\vec{b}+\vec{c}|^2=|-\vec{a}|^2$,

$\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2$,

$25+2\vec{b}\cdot\vec{c}+49=9 \Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{65}{2}$.

5. 平面上有三向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 若 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2$ 且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, 則△ ABC

的面積為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解析 $\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，$\therefore O$ 為△ ABC 之重心，

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}\Rightarrow\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$，

$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\Rightarrow 1+3+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Rightarrow\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，

$\triangle ABC=3\triangle OAB=3\left(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ．

6. 設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=2$，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$，若 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}$ 互相垂直，則 t 值為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{2}{5}$

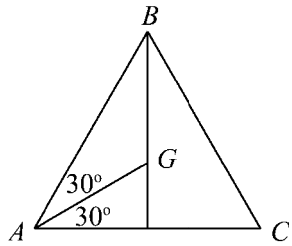
解析 $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{b}\right)=0$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}\right|^2-t\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-t\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$

$\Rightarrow 1-t+1-4t=0$，$\therefore t=\dfrac{2}{5}$ ．

7. 已知正三角形 ABC 每邊長為 5，G 為重心，求下列各式之值：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GA}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．



解答 (1) $\dfrac{25}{2}$;(2) $-\dfrac{25}{2}$

解析 (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\cdot 5\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{25}{2}$ ．

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=-5\cdot\left(5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\right)\cdot\cos 30^\circ=-\dfrac{25}{2}$ ．

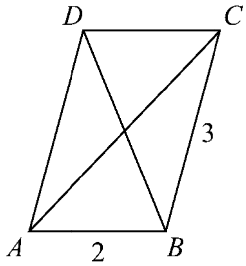
8. $\left|\overrightarrow{u}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{v}\right|=4$，$\left|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right|=2\sqrt{7}$，則 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 之夾角為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 120°

解析 $\left|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right|^2=28\Rightarrow 4\left|\overrightarrow{u}\right|^2+\left|\overrightarrow{v}\right|^2+4\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=28$

$\Rightarrow 36+16+4(3\cdot 4\cdot\cos\theta)=28\ \Rightarrow\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore\theta=120^\circ$ ．

9. 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=3$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿.



解答 5

解析

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=9-4=5\ .$$

10.設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是平面向量，$\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=2$，且 $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{21}$，則 $\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答 $\sqrt{91}$

解析 $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=21\Rightarrow 9+4\cdot4+4\vec{a}\cdot\vec{b}=21$，$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，

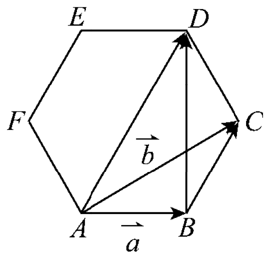
$\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|^2=9\cdot9+4-6(-1)=91$，$\therefore\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{91}$.

11.正六邊形 $ABCDEF$ 中，令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，求

(1) $\overrightarrow{CD}=x\vec{a}+y\vec{b}$，則 $(x,y)=$＿＿＿＿＿＿＿＿；(2) $\overrightarrow{EA}=s\vec{a}+t\vec{b}$，則 $(s,t)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答 (1) $(-2,1)$;(2) $(3,-2)$

解析



(1) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=2\left(\vec{b}-\vec{a}\right)-\vec{b}=-2\vec{a}+\vec{b}$，

$\therefore x=-2$，$y=1\Rightarrow(x,y)=(-2,1)$.

(2) $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{BD}=-\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=-\left(2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)=-2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AB}$

$=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=3\vec{a}-2\vec{b}$，

$\therefore s=3$，$t=-2\Rightarrow(s,t)=(3,-2)$.

12.已知 $\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=4$，求

(1)若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夾角為 $120°$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$＿＿＿＿；(2)若 $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=2\sqrt{13}$，則 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$＿＿＿＿＿＿.

解答 (1) -6;(2)5

解析 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos120°=-6$.

(2) $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2=52\Rightarrow4\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=52\Rightarrow36+16+4\vec{a}\cdot\vec{b}=52$，

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\therefore\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2}=5$.

13.△ ABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=3$，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$＿＿＿＿＿＿＿；(2) $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答 (1) $-\frac{3}{2}$;(2) $\sqrt{34}$

解析 (1) $2\cdot3\cdot\cos A=2\cdot3\cdot\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=-\frac{3}{2}$．

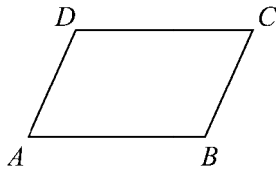
(2) $\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|^2}=\sqrt{4+4\cdot9+4\left(\frac{-3}{2}\right)}=\sqrt{4+36-6}=\sqrt{34}$．

14. 設 $ABCD$ 為一平行四邊形，求下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$＿＿＿＿＿＿＿；

(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=$＿＿＿＿＿＿＿；

(3) $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{DB}=$＿＿＿＿＿＿＿．



解答 (1) $\overrightarrow{AC}$;(2) $\overrightarrow{AB}$;(3) $\overrightarrow{AB}$

解析 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$．

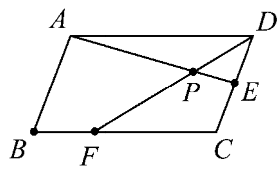
(2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$．

(3) $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$．

15. 如右圖 $ABCD$ 為一個平行四邊形，$\overline{CE}:\overline{ED}=1:1$ 且 $\overline{BF}:\overline{FC}=1:3$，則

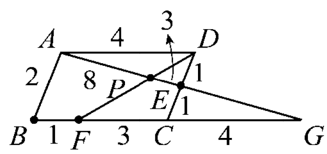
(1) $\overline{PE}:\overline{AP}=$＿＿＿＿＿；

(2)求△ PAD 之面積 : ▱ $ABCD$ 之面積 = ＿＿＿＿＿．



解答 (1) $3:8$;(2) $2:11$

解析 (1)令 $\overline{AD}=4t$，　延伸 $\overline{AE}$ 和 $\overline{BC}$ 交於 G，



△ ABG 中，　$\because \overline{CE}\parallel\overline{AB}$，$\therefore \frac{1}{2}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{BG}}\Rightarrow\overline{CG}=4t$，

又△ $APD\sim$ △ GPF

$\Rightarrow\overline{AP}:\overline{PG}=\overline{AD}:\overline{FG}=4:7\Rightarrow\overline{AP}=\frac{4}{11}\overline{AG}$，

又 $\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AG}$，令 $\overline{AG}=22s$，　$\Rightarrow\overline{AP}=\frac{4}{11}\cdot22s=8s$，$\overline{AE}=\frac{1}{2}\cdot22s=11s$，

$\therefore \overline{PE}:\overline{AP}=3:8$．

(2)△ $APD=\frac{8}{11}$△ $ADE=\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{2}$△ $ACD=\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{2}$▱ $ABCD$ 面積 $=\frac{2}{11}$▱ $ABCD$ 面積，

$\therefore \triangle APD$ 面積：$\square ABCD$ 面積 $=2:11$.

16. $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 為平面上二向量， $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ ， $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$， $\left|\overrightarrow{b}\right|=1$，若 $\overrightarrow{a}+\left(t^2+3\right)\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}+t\,\overrightarrow{b}$ 互相垂直，則 $t=$__________ .

解答 -1

解析 $\because \left[\overrightarrow{a}+\left(t^2+3\right)\overrightarrow{b}\right] \perp \left[\overrightarrow{a}+t\,\overrightarrow{b}\right]$,

$\therefore \left[\overrightarrow{a}+\left(t^2+3\right)\overrightarrow{b}\right] \cdot \left[\overrightarrow{a}+t\,\overrightarrow{b}\right]=0$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{a}\right|^2+t\left(t^2+3\right)\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$（ $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ ， $\therefore \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}=0$ ）$\Rightarrow 4+t\left(t^2+3\right)\cdot 1=0$

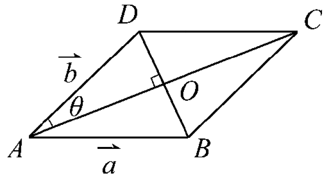
$\Rightarrow t^3+3t+4=0 \Rightarrow (t+1)\left(t^2-t+4\right)=0$

$\Rightarrow t$ 為實數，$\therefore t=-1$.

17.設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right| \neq 0$，若 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|-\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{2}\left|\overrightarrow{a}\right|$，則 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為__________ .

解答 $30°$

解析 $\because \left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|$，$\therefore$ 平行四邊形 $ABCD$ 為菱形，且 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$,



如右圖，$\triangle AOD$ 中，

$\left|\overrightarrow{AO}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\theta \Rightarrow \left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=2\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\theta \cdots$ ①

$\left|\overrightarrow{DO}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\sin\theta \Rightarrow \left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=2\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\sin\theta \cdots$ ②

①②代入 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|-\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{2}\left|\overrightarrow{a}\right|$,

得 $2\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\theta-2\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\sin\theta=\sqrt{2}\left|\overrightarrow{a}\right| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2}$,

$\sin 45°\cdot\cos\theta-\cos 45°\cdot\sin\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(45°-\theta\right)=\frac{1}{2}$,

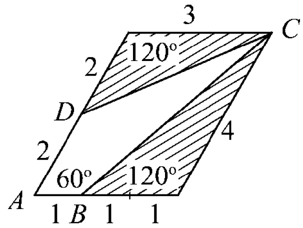
$\because \left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|>\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right| \Rightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0$,

表示 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為銳角，$\therefore 45°-\theta=30° \Rightarrow \theta=15°$，$\therefore \overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 $30°$.

18.設四邊形 $ABCD$ 中， $\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$， $\left|\overrightarrow{AD}\right|=2$， $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 之夾角為 $60°$， $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ ，則

(1) $\left|\overrightarrow{AC}\right|=$__________；(2)四邊形 $ABCD$ 之面積為__________ .

解答 (1) $\sqrt{37}$;(2) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$



解析

(1) $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right|^2=9\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=9\cdot1+4\cdot4+12(1\cdot2\cdot\cos60^\circ)=37$， 故 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{37}$.

(2) $ABCD$ 面積 $=4\cdot3\cdot\sin60^\circ-\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\sin120^\circ-\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin120^\circ$

$=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

19.已知 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{c}\right|=4$，且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}=$____________ .

解答 $\frac{29}{2}$

解析 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}\right|^2=\left|\overrightarrow{0}\right|^2$， $4+9+16+2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\right)=0$，

$\therefore\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\frac{29}{2}$.

20.四邊形 $ABDC$，若 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}$，則

(1)$\triangle ABC$ ：$\triangle ABD$ 的面積比為____________；

(2)若 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於一點 O，且 $\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，數對 $(\alpha,\beta)=$____________ .

解答 (1) $4:3$;(2) $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$

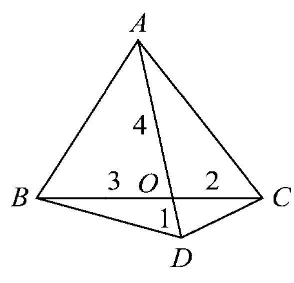
解析 (1) $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，

設 $\overrightarrow{AO}=t\overrightarrow{AD}=\frac{2t}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3t}{4}\overrightarrow{AC}$，

$\because B$， O， C 共線， $\therefore \frac{2t}{4}+\frac{3t}{4}=1\Rightarrow t=\frac{4}{5}$，

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overline{AO}:\overline{OD}=4:1$，

$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overline{BO}:\overline{OC}=3:2$，



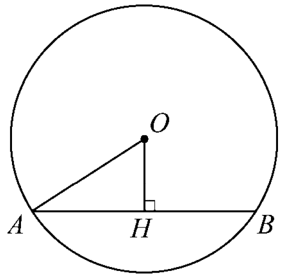
$\triangle ABC:\triangle ABD=\left(\frac{5}{3}\triangle ABO\right):\left(\frac{5}{4}\triangle ABO\right)=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=4:3$.

(2) $(\alpha,\beta)=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$.

21.一圓之圓心為 O， $\overline{AB}$ 為一弦，若 $\overline{AB}=4$，則 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=$____________ .

解答　-8

解析



作 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=-\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\angle OAB=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\cos\angle OAB$$

$$=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|=-4\cdot 2=-8 \ .$$

22.△ ABC 中， $\overline{AB}=3$， $\overline{AC}=4$， $\angle BAC=120^\circ$， 求

(1) $\overline{BC}=$____________；(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$____________；(3) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$____________ .

解答　(1) $\sqrt{37}$;(2) -6 ;(3) 22

解析　(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos 120^\circ \quad =16+9-2\cdot 4\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=37$$

$\therefore \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{37}$，即 $\overline{BC}=\sqrt{37}$.

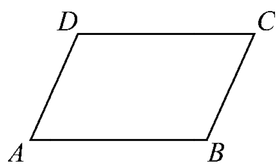
(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos 120^\circ=3\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$.

(3) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{\left|\overrightarrow{CA}\right|^2+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}{2}=\dfrac{16+37-9}{2}=22$.

23.設平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=8$， $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=20$，則 $\overline{BC}$ 之長為____________ .

解答　$2\sqrt{21}$

解析



$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right) \quad =\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2,$$

$20=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-64\Rightarrow\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=84$， $\left|\overrightarrow{AD}\right|=2\sqrt{21}$，即 $\overline{BC}=2\sqrt{21}$.

24.設 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ ， $\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|$， $5\left(\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|-\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|\right)=2\left|\overrightarrow{a}\right|$，若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta$

$=$____________ .

解答　$\pm\frac{7}{25}$

解析 $5\left(\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|-\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|\right)=2\left|\overrightarrow{a}\right|\Rightarrow$ 平方

$$\therefore 25\left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{a}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2-2\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|\right)=4\left|\overrightarrow{a}\right|^2,$$

又 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2}=\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2}=\sqrt{2\left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)}$,

同理 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{2\left(\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)}\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=2\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^4-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}$,

$\therefore$ 原式 $\Rightarrow 25\left(4\left|\overrightarrow{a}\right|^2-4\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^4-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}\right)=4\left|\overrightarrow{a}\right|^2\Rightarrow 24\left|\overrightarrow{a}\right|^2=25\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^4-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}$

$$\Rightarrow 24^2\left|\overrightarrow{a}\right|^4=25^2\left[\left|\overrightarrow{a}\right|^4-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2\right]\Rightarrow\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2=\frac{49\left|\overrightarrow{a}\right|^4}{25^2}\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\pm\frac{7}{25}\left|\overrightarrow{a}\right|^2,$$

$$\therefore\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\frac{\pm\frac{7}{25}\left|\overrightarrow{a}\right|^2}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{a}\right|}=\pm\frac{7}{25}.$$