

第二章 總複習

基礎題 〈單選題〉 (每題 6 分,共 18 分)

1. 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 O 以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4 。例如： $AA1234$, $AB4434$ 為可出現的車牌號碼；而 $AO1234$, $AB3444$ 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為

(1) 25×9^3 (2) $25 \times 9^2 \times 10$ (3) 25×900 (4) 25×990 .

解：前兩碼有 $1 \times 25 = 25$ 種，

後四碼中：(全部) - (連續出現三個 4)

$$= 10 \times 10 \times 10 - 10 \times 1 \times 1 = 990, \quad A \square - \square \square \square 4$$

知車牌號碼個數為 25×990 ，故選(4)。

2. 在 $3, 5, 5, 7, 7, 7$ 之中，任取 2 個或 2 個以上的數相乘，可製造出多少不同的積？

(1) 16 (2) 18 (3) 20 (4) 24 (5) 28 .

解：3 的取法，可取 0, 1 個，有 2 種，

5 的取法，可取 0, 1, 2 個，有 3 種，

7 的取法，可取 0, 1, 2, 3 個，有 4 種，

全部的取法有 $2 \times 3 \times 4 = 24$ 種。

但取一個的有 3 種，取 0 個的有 1 種，得 $24 - 3 - 1 = 20$ (種)，故選(3)。

3. 一個「訊息」是由一串 5 個數字排列組成，且每個數字只能是 0 或 1，例如： 10010 與 01011 就是兩個不同的訊息，兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數，例如：數字串 10010 與 01011 在第 1, 2 及 5 三個位置不同，所以訊息 10010 與 01011 的距離為 3。試問以下哪些選項是正確的？

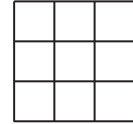
(1) 與訊息 10010 相距最遠的訊息為 11101 (2) 任兩訊息之間的最大可能距離是 4 (3) 與訊息 10010 相距為 1 的訊息恰有 5 個 (4) 與訊息 10010 相距為 2 的訊息恰有 9 個。

解：(1) 與訊息 10010 相距最遠的訊息為 01101 。

- (2)最大可能距離是 5 .
 (3)相距為 1 的訊息，表示與 10010 的位置恰一個相異 $C_1^5 = 5$.
 (4)相距為 2 的訊息，表示與 10010 的位置恰二個相異 $C_2^5 = 10$. 故選(3) .

〈多選題〉(每題 10 分,共 30 分)

4. 小熹在地上畫了一個九宮格，然後在 9 格中每一格填入○或×，試問全部的填法為



- (1) 2^9 (2) 9^2 (3) H_9^2 (4) $C_0^9 + C_1^9 + C_2^9 + \dots + C_9^9$.

解：每一格都有○與×兩種方法，共有 2^9 種方法，
 而 $C_0^9 + C_1^9 + C_2^9 + \dots + C_9^9 = 2^9$ ，故選(1)(4) .

5. 有 5 種不同的果汁，想倒入 3 個杯子，每杯限倒一種果汁，試問哪些選項正確？

- (1)杯子相同，每種果汁限倒一杯，共有 10 種方法 (2)杯子相異，每種果汁限倒一杯，共有 60 種方法 (3)杯子相同，每種果汁無限供應，共有 35 種方法 (4)杯子相異，每種果汁無限供應，共有 125 種方法 .

解：(1) 5 種果汁任取 3 種，由組合 $C_3^5 = 10$.
 (2) 5 種果汁倒 3 相異杯子，由排列 $P_3^5 = 60$.
 (3) 5 種果汁分別倒 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 杯，由重複組合
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$ ，得 $H_3^5 = C_3^7 = 35$.
 (4)每個杯子有 5 種選擇，由重複排列 $5^3 = 125$. 故選(1)(2)(3)(4) .

6. 多項式 $(1+x^2)^{10}$ 展開式中合併次數相同的項後，試問何者正確？

- (1)共有 21 項 (2) x^6 項的係數為 C_3^{10} (3)所有係數的和為 1024 (4)奇次項的係數和為 512 .

解： $(1+x^2)^{10} = 1 + C_1^{10}x^2 + C_2^{10}x^4 + C_3^{10}x^6 + \dots + C_{10}^{10}x^{20}$ ，

- (1)共有 11 項 .
 (2) x^6 項的係數為 C_3^{10} .
 (3)所有係數的和為 $x=1$ 代入，得 $2^{10} = 1024$.
 (4)奇次項的係數和為 0 . 故選(2)(3) .

進階題 (共 52 分)

1. 有一個兩列三行的表格如右圖，在六個空格中分別填入數字 1, 2, 3, 4, 5, 6 (不得重複)，則 1, 2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有 432 種。(8 分)

解：依序先填 1，次填 2，再填 3, 4, 5, 6，

同一列的情形有 2 種，每種有 $3 \times 2 \times 4! = 144$ ，共 288 種，
同一行的情形有 3 種，每種有 $2 \times 1 \times 4! = 48$ ，共 144 種，
由 $288 + 144 = 432$ (種)。

2. 某動物園的遊園列車共有 7 節車廂，依序編號 1 到 7，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則 7 節車廂一共有 72 種畫法。(8 分)

解：中間三節車廂的畫法有 $3! = 6$ (種)，

左右共四節車廂，要畫一節企鵝、一節無尾熊、二節貓熊，畫法有 $\frac{4!}{2!} = 12$ (種)，
得共有 $6 \times 12 = 72$ (種)。

3. 小熹在超商買了三類關東煮，魚丸串有 4 串，貢丸串有 3 串，魚板串有 2 串，小熹隨興的一次一串，吃完這 9 串的方式有 1260 種。(8 分)

解：4 串, 3 串, 2 串相同物的排法有 $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$ 種。

4. 自相異的 11 個球中，至少取 6 個球，試問全部的方法數。(8 分)

解：可能取 6 個, 7 個, 8 個, 9 個, 10 個, 11 個，

$$\begin{aligned} & C_6^{11} + C_7^{11} + C_8^{11} + C_9^{11} + C_{10}^{11} + C_{11}^{11} \\ &= \frac{1}{2} (C_0^{11} + C_1^{11} + C_2^{11} + C_3^{11} + C_4^{11} + C_5^{11} + C_6^{11} + C_7^{11} + C_8^{11} + C_9^{11} + C_{10}^{11} + C_{11}^{11}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{11} = 2^{10} = 1024 . \end{aligned}$$

5. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男女生均至少要有 2 人，某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽，若此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有 161 種不同的組隊方法。(10 分)

解：可能情形有三種，

(男 2 女 6) 或 (男 3 女 5) 或 (男 4 女 4)

$$= C_2^4 \times C_6^7 + C_3^4 \times C_5^7 + C_4^4 \times C_4^7 = 42 + 84 + 35 = 161 \text{ 種} .$$

當然也可採用反面解法，

$$\text{全部方法} - (1 \text{ 男 } 7 \text{ 女}) = C_8^{11} - C_1^4 C_7^7 = 165 - 4 = 161 \text{ 種} .$$

6. 棒球比賽每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位，某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：
- (一) 投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；
- (二) 外野手 4 位(每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備)；
- (三) 另外 1 位是全隊人氣最旺的明星球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。
- 已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並由人氣最旺的明星球員擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有 192 種先發守備陣容。(當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容)
- (10 分)

解：擔任守備位置的方法數，

投手 1、捕手 1、一壘 1、二壘 $C_1^2 = 2$ 、三壘 $C_1^2 = 2$ 、

游擊手 $C_1^2 = 2$ 、外野手 $P_3^4 = 24$ ，

得 $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 24 = 192$ (種)。