第一章　總複習

基礎題〈單選題〉（每題 6 分,共 18 分）

1. 已知〈 a_n 〉是一等比數列，且前 9 項的乘積是 512，試問 a_3 與 a_7 的乘積為

   (1) $\sqrt{2}$　(2) 2　(3) 4　(4) 8．

   解：設首項為 a，公比為 r，$a_n = ar^{n-1}$，

   因前 9 項的乘積為 $a^9r^{36} = 512$，

   知 $ar^4 = 2$，

   得 $a_3a_7 = (ar^4)^2 = 4$，故選(3)．

2. 級數 $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\cdots+19\cdot21$ 的和為

   (1) 1131　(2) 1530　(3) 2012　(4) 4435．

   解：$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\cdots+19\cdot21$

   $$=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)(2k+1)$$

   $$=4\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}1$$

   $=1540-10=1530$，故選(2)．

3. 對所有正整數 n，已知 $3\cdot5^{2n+1}+2\cdot2^{3n}$ 恆為質數 P 的倍數，試問 P 值為

   (1) 7　(2) 13　(3) 17　(4) 23．

   解：$n=1$ 時，$3\cdot5^3+2\cdot2^3=391=17\times23$，

   $n=2$ 時，$3\cdot5^5+2\cdot2^6=9503=17\times559$，

   知 $P=17$，

   故選(3)．

〈多選題〉（每題 10 分,共 30 分）

4. 設數列〈 a_n 〉，〈 b_n 〉均為等差數列，試問下列何者必為等差數列？
(1)〈 $3+a_n$ 〉　(2)〈 $5\cdot a_n$ 〉　(3)〈 a_n+b_n 〉　(4)〈 2^{a_n} 〉．

解：設 $a_n=a_1+(n-1)d$， $b_n=b_1+(n-1)k$，
(1) $3+a_n=(3+a_1)+(n-1)d$， 是公差為 d 的等差數列．
(2) $5\cdot a_n=5a_1+(n-1)\cdot 5d$， 是公差為 $5d$ 的等差數列．
(3) $a_n+b_n=(a_1+b_1)+(n-1)(d+k)$， 是公差為 $d+k$ 的等差數列．
(4) $2^{a_n}=2^{a_1}\cdot(2^d)^{n-1}$， 是公比為 2^d 的等比數列．故選(1)(2)(3)．

5. 等差數列〈 a_n 〉中， $a_1>0$ 且前 n 項的和為 S_n， 若 $S_{20}=S_{30}$， 試問下列哪些選項正確？
(1)公差小於 0　(2) $a_{25}>0$　(3) $S_{40}>0$　(4) $S_{50}=0$．

解： $S_{30}-S_{20}=a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}=0$， 因〈 a_n 〉是等差數列，
知 $a_{21}+a_{30}=a_{22}+a_{29}=a_{23}+a_{28}=a_{24}+a_{27}=a_{25}+a_{26}=0$，
且 $a_1+a_{50}=a_2+a_{49}=\cdots=a_{20}+a_{31}=0$，
已知 $a_1>0$， 知 $d<0$ 且前 25 項 a_1, a_2, $\cdots$, a_{25} 均大於 0，
(1) $d<0$　(2) $a_{25}>0$　(3) $S_{40}=S_{10}>0$　(4) $S_{50}=0$，
故選(1)(2)(3)(4)．

6. 設有等差數列〈 a_n 〉與等比數列〈 b_n 〉，試問哪些選項正確？
(1)〈 a_n 〉的首項 a 與公差 d 都是有理數，則每一項都是有理數
(2)〈 a_n 〉中第五項與第七項都是有理數，則每一項都是有理數
(3)〈 b_n 〉的首項 b 與公比 r 都是有理數，則每一項都是有理數
(4)〈 b_n 〉中第三項與第五項都是有理數，則每一項都是有理數．

解：(1) $a_n=a+(n-1)d$， 成立．
(2) $a_7=a_5+2d$， 知 d 為有理數，成立．
(3) $b_n=b\cdot r^{n-1}$， 成立．
(4) $b_5=b_3r^2$， 知 r^2 是有理數，但 r 不一定是有理數，故不一定成立．
故選(1)(2)(3)．

進階題（共 52 分）

1. 有一直角三角形的三邊長為等差數列且三邊長的和是 24，試問此直角三角形的面積．（8 分）

   解：設三邊長為 $a-d,\ a,\ a+d$，其中 $d>0$，

   因三邊長的和 $(a-d)+a+(a+d)=24$，得 $a=8$，

   又直角三角形中 $(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$，

   即 $(8+d)^2=(8-d)^2+8^2$，得 $d=2$，

   知三邊長為 6, 8, 10，故三角形的面積為 $\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$．

2. 若數列〈a_n〉滿足 $a_1=\frac{1}{7},\ a_2=\frac{3}{7},\ a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)$，試問 a_{100} 的值．（8 分）

   解：數列〈a_n〉為 $\frac{1}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7},\cdots$，

   得 $a_{100}=\frac{3}{7}$．

3. 已知 $1^3=1,\ 2^3=3+5,\ 3^3=7+9+11,\ 4^3=13+15+17+19,\ \cdots$，$n^3$ 可表成 n 個連續正奇數的和，當 $13^3=a_1+a_2+\cdots+a_{13}$ 時，試問 a_{13} 的值．（8 分）

   解：$13^3=a_1+a_2+\cdots+a_{13}$ 時，

   a_{13} 是等差數列〈$2n-1$〉中的第 $1+2+3+\cdots+13=91$（項），

   知 $a_{13}=2\times 91-1=181$．

4. 等差數列〈 a_n 〉中，$a_n > 0$ 且前 n 項的和 S_n，滿足 $6S_n = a_n{}^2 + 3a_n - 4$，試問此數列的公差．（8 分）

解：$6S_1 = a_1{}^2 + 3a_1 - 4$ 且 $a_1 = S_1$，知 $a_1 = 4$，

$6S_2 = a_2{}^2 + 3a_2 - 4$ 且 $S_2 = a_1 + a_2 = 4 + a_2$，

由 $6(4 + a_2) = a_2{}^2 + 3a_2 - 4$，得 $a_2 = 7$，

因〈 a_n 〉是等差數列，$d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$ ．

5. 平面上 n 條相異的直線，任兩條不平行，任三條不共點，若這 n 條直線最多將平面分割成 a_n 個區域，

(1)試問 a_{n+1} 與 a_n 的關係式．（5 分）

(2)試求一般項 a_n ．（5 分）

解：(1) $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7,\ \cdots$，

第 $n+1$ 條直線最多被前 n 條直線分成 $n+1$ 段，

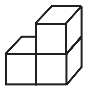
增加 $n+1$ 個區域，得 $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ．

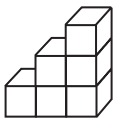
(2) $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$= 2 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ ．

6. 將同樣大小的正立方體積木堆成一系列的階梯形狀，圖(一)有 1 個積木，圖(二)有 3 個積木，圖(三)有 6 個積木，令 a_n 表示第 n 個圖中的積木總數，


(圖一)


(圖二)


(圖三)

…

(1)試問 a_{n+1} 與 a_n 的關係．（5 分）

(2)試求一般項 a_n ．（5 分）

解：(1) $a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 2,\ a_3 = a_2 + 3,\ \cdots$，

得 $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ．

(2) $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$= 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$= \dfrac{n^2 + n}{2}$ ．