3-2　機率的定義與性質

實力養成

基礎題（每題 5 分,共 30 分）

1. 擲一公正的骰子一次，試問點數爲質數的機率是

   (1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{2}{3}$　(3) $\frac{3}{4}$　(4) $\frac{5}{6}$.

   解：樣本空間 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，點數爲質數的事件 $E=\{2, 3, 5\}$，

   所求機率 $P(A)=\frac{|E|}{|S|}=\frac{1}{2}$，故選(1).

2. 袋中有 A, B, C 三個球，今自袋中每次任取一球，取後不放回，若第一次、第二次、第三次取到 A 球的機率分別是 P_1, P_2, P_3，則

   (1) $P_1>P_2$　(2) $P_2>P_3$　(3) $P_1<P_2<P_3$　(4) $P_1=P_2=P_3$.

   解：依序記錄取球順序，得樣本空間 S.

   $S=\{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$，

   第一次、第二次、第三次取到 A 球事件 E_1, E_2, E_3，

   $|E_1|=2$，$|E_2|=2$，$|E_3|=2$，得 $P_1=P_2=P_3=\frac{1}{3}$，故選(4).

3. 袋中有 2 個紅球，3 個白球，今自袋中每次任取一球，取後不放回，若第一、二、三、四、五次取到紅球的機率分別是 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5，則

   (1) $P_1>P_2$　(2) $P_1>P_3$　(3) $P_1>P_4$　(4) $P_1=P_5$.

   解：視爲相異的五球 R_1, R_2, W_1, W_2, W_3，知 $|S|=5!=120$.

   第一次取到紅球的情形爲 A，$|A|=C_1^2\cdot 4!=48$，

   得 $P(A)=\frac{2}{5}$. $\underline{\ R\ }$ ___ ___ ___ ___,

   第二次取到紅球的情形爲 B，$|B|=C_1^2\cdot 4!=48$，

   得 $P(B)=\frac{2}{5}$. ___ $\underline{\ R\ }$ ___ ___ ___,

同理，第三、四、五次取到紅球的機率均爲$\frac{2}{5}$，故每次取到紅球的機率相等，故選(4)．

4. 學校某社團中有 24 位男同學與 36 位女同學，將互選下一任社長；假設每位女同學被選上的機率是男同學的 2 倍，試問下一任社長是男同學的機率是 $\underline{\quad\frac{1}{4}\quad}$．

解：設每位男同學、女同學被選上的機率分別爲 $P(A), P(B)$， 滿足 $P(B)=2P(A)$，

且 $24P(A)+36P(B)=1$， 得 $P(A)=\frac{1}{96}$，

知下一任社長是男同學的機率爲 $24P(A)=\frac{1}{4}$ ．

5. 設事件 A 發生的機率爲$\frac{1}{2}$， 事件 B 發生的機率爲$\frac{1}{3}$，

(1) $P(A\cap B)$的範圍．

(2) $P(A\cup B)$的範圍．

解：(1) $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{3}$， 得 $0\le P(A\cap B)\le\frac{1}{3}$ ．

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\le P(A\cup B)\le\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0$，　　得$\frac{1}{2}\le P(A\cup B)\le\frac{5}{6}$ ．

6. 袋中有 15 顆球，每次只能取出 2 顆且需馬上放回，甲試行 5 次後恰有 1 回是 2 顆紅球，若袋中只有紅球和白球，請問袋中紅球最有可能是幾顆？

解：自 15 顆球中任取 2 顆的方法有$|S|=C_2^{15}=105$種．

設紅球有 k 顆，則任取 2 顆的事件爲 A 時， $|A|=C_2^k=\frac{k(k-1)}{2}$，

得 $P(A)=\frac{C_2^k}{C_2^{15}}=\frac{1}{5}$， 知 $k=7$， 故袋中紅球最有可能是 7 顆．

進階題（**每題** 5 **分**,**共** 45 **分**）

1. 一袋中有紅球 3 個，白球 2 個，若每球被取到的機會均等，試求：

(1)任取 2 球，均爲紅球的機率．

(2)任取 2 球，恰爲 1 紅球，1 白球的機率．

解：所有的球均看成相異，故$|S|=C_2^5=10$．

(1)兩球均爲紅球的事件 A，則$|A|=C_2^3=3$，

故所求機率 $P(A)=\dfrac{|A|}{|S|}=\dfrac{3}{10}$．

(2)一紅球一白球的事件 B，則$|B|=C_1^3C_1^2=6$，

故所求機率 $P(B)=\dfrac{|B|}{|S|}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$．

2. 某課外活動社團共有 20 位同學參加，已知其中高一、高二、高三同學分別是 11 人、5 人、4 人．若由該社團中任選兩人，則此兩人是不同年級學生的機率是 $\underline{\dfrac{119}{190}}$．

解：高一有 11 人，高二有 5 人，高三有 4 人，

任選兩人的方法數$|S|=C_2^{20}=190$，

兩人是不同年級學生的樣本數爲 $C_1^{11}\cdot C_1^5+C_1^{11}\cdot C_1^4+C_1^5\cdot C_1^4=119$，

知所求的機率爲 $\dfrac{119}{190}$．

3. 袋中有 3 紅球、2 白球，每次取一球，取出後不放回，試求：
(1)最後一次取到紅球的機率．
(2)先取完紅球的機率．

解：依序排成一列的方法數$|S|=\dfrac{5!}{3!\,2!}=10$種．

(1)最後一次是紅球的事件 A，則$|A|=\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$，得 $P(A)=\dfrac{3}{5}$．

(2)先取完紅球，表示最後一顆是白球，得 $P(A')=1-P(A)=\dfrac{2}{5}$．

4. 某次民意調查，從隨機抽樣的 15 人中對三位候選人的支持率：

候選人	甲	乙	丙
支持率	4	5	6

若任選 2 人，試問兩人支持同一候選人的機率．

解：樣本空間 S，$|S|=C_2^{15}=105$，

兩人同時支持甲、乙、丙的事件分別是 E_1, E_2, E_3，

$|E_1| = C_2^4 = 6$，$|E_2| = C_2^5 = 10$，$|E_3| = C_2^6 = 15$，$|E| = 6+10+15 = 31$，

$P(E) = \dfrac{|E|}{|S|} = \dfrac{31}{105}$ ．

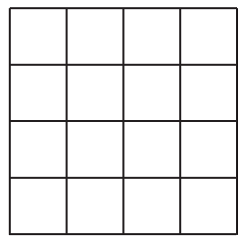
5. 不透明箱中置有編號分別為 1, 2, 3, 6, 8 的球各一顆．同時自箱中隨機取出三顆球，求此三球編號之和大於 14 的機率．

解：樣本空間 S，則 $|S| = C_3^5 = 10$，

三球編號之和大於 14 的事件 E，

$E = \{(1,\ 6,\ 8),\ (2,\ 6,\ 8),\ (3,\ 6,\ 8)\}$，$|E| = 3$，故 $P(E) = \dfrac{|E|}{|S|} = \dfrac{3}{10}$ ．

6. 在圖中的棋盤方格中，隨機任意取兩個格子，試問選出的兩個格子不在同行（有無同列無所謂）的機率．



解：任取兩個格子的方法數為 $|S| = C_2^{16} = 120$，

兩個格子在同一行的方法數為 $|A| = 4 \times C_2^4 = 24$，

得兩個格子在同一行的機率 $P(A) = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$，

知不在同一行的機率 $P(A') = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$ ．

7. 有三個人玩「剪刀、石頭、布」的遊戲一次，試求：
(1)恰一人得勝之機率．　　(2)恰二人得勝之機率．

解：依甲、乙、丙順序的樣本空間 S，則 $|S| = 3^3 = 27$ ．

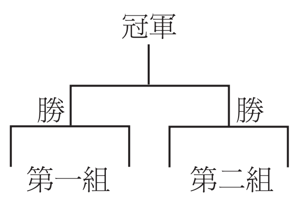
(1)甲勝的情形 (布, 石, 石), (石, 刀, 刀), (刀, 布, 布) ．

同理乙，丙勝的情形各 3 種，得 $|A| = 9$，知 $P(A) = \dfrac{1}{3}$ ．

(2)甲、乙勝的情形 (布, 布, 石), (石, 石, 刀), (刀, 刀, 布) ．

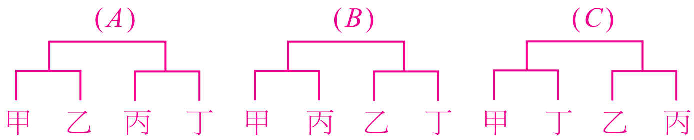
同理，乙、丙勝或甲、丙勝的情形各 3 種，得 $|B| = 9$，知 $P(B) = \dfrac{1}{3}$ ．

8. 某棒球比賽由實力完全相當的甲、乙、丙、丁四隊參加，先將四隊隨機抽籤分成兩組比賽，兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽，如圖，根據過去的記錄，所有隊伍比賽時各



隊獲勝的機率均為 0.5，則冠亞軍賽由甲、乙兩隊對戰的機率為 $\underline{\quad\frac{1}{6}\quad}$.

解：甲、乙、丙、丁共有 3 種賽程



賽程(B), (C)中，甲、乙同時獲勝而兩隊對戰的機率為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

所求為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$.

9. 袋中有三個一樣大小的球，分別標示 10 分、20 分、30 分；重複自袋中取出一球後放回，記錄得分並累加，其中取出各球的機率皆相等，試問抽三次後總分為 60 分的機率 .

   解：總分為 60 分的情形，三球為 10 分、20 分、30 分，有 6 種順序；

   三球為 20 分、20 分、20 分有 1 種順序；

   而全部的情形 $n(S)=3^3=27$，得機率為 $\frac{6+1}{27}=\frac{7}{27}$.

情境模擬題（共 25 分）

1. 甲、乙、丙三所高中的一年級分別有 3, 4, 5 個班級．從這 12 個班級中隨機選取一班參加國文抽考，再從未被抽中的 11 個班級中隨機選取一班參加英文抽考，則參加抽考的兩個班級在同一所學校的機率最接近以下哪個選項？
   (1) 21%　(2) 23%　(3) 25%　(4) 27%　(5) 29%．（8 分）　　【98 學測】

   解：兩個班級在同一所學校的機率為

   $P(\text{甲})=\frac{C_2^3}{C_2^{12}}=\frac{1}{22}$，$P(\text{乙})=\frac{C_2^4}{C_2^{12}}=\frac{1}{11}$，$P(\text{丙})=\frac{C_2^5}{C_2^{12}}=\frac{5}{33}$，

   知所求的機率 $P(\text{甲})+P(\text{乙})+P(\text{丙})=\frac{19}{66}\approx 29\%$，故選(5) .

2. 阿康和阿熹及其他 8 名同學共 10 名學生輪到本周擔任值日生，本周 5 個上課日，每天從尚未當過值日生的同學中，抽籤選出 2 位輪值，則阿康和阿熹同一天擔任值日生的機率爲何？（8 分）

解：所有的分組的樣本空間 S，則 $|S| = C_2^{10}C_2^8C_2^6C_2^4C_2^2 \times \dfrac{1}{5!}$ ．

阿康和阿熹同一天的事件 A，則 $|A| = C_2^8C_2^6C_2^4C_2^2 \times \dfrac{1}{4!}$ ．

得 $P(A) = \dfrac{|A|}{|S|} = \dfrac{5}{C_2^{10}} = \dfrac{1}{9}$ ．

3. 康先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 5、一個 7、一個 8，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試．請問他只試一次就成功的機率有多少？（9 分）

解：樣本空間 S，則 $|S| = \dfrac{4!}{2!} = 12$ 種，

一次成功的事件 A，則 $|A| = 1$ 種，

得 $P(A) = \dfrac{1}{12}$ ．