2-2　排列與組合

實力養成

基礎題（**每題** 5 **分**,**共** 30 **分**）

1. 某拳擊比賽，規定每位選手必須和其他選手各比賽一場，若賽程總計為 78 場，試問選手人數為多少人？
(1) 7　(2) 12　(3) 13　(4) 18．

解：設選手人數共 n 人，

$C_2^n=\dfrac{n(n-1)}{2}=78$，

知 $n(n-1)=156=13\times 12$，得 $n=13$，故選(3)．

2. 自忠、孝、仁、愛、信共 5 班的 10 位正、副班長中，任選 3 人成立委員會，但規定每班中最多一位的選法有多少種？
(1) 10　(2) 80　(3) 120　(4) 720．

解：先任取 3 個班 $C_3^5=10$ 種，

再由該班任取一位 $2^3=8$ 種，

得 $10\times 8=80$ 種，故選(2)．

3. 將 4 本相異的筆記本放入編號為 1 號和 2 號的抽屜裡，使得放入每個抽屜的筆記本之數量不小於該抽屜的編號，試問共有幾種放法？
(1) 5　(2) 6　(3) 10　(4) 16．

解：1 號 2 本，2 號 2 本的情形有 $C_2^4C_2^2=6$ 種，

1 號 1 本，2 號 3 本的情形有 $C_1^4C_3^3=4$ 種，

共有 $6+4=10$（種），故選(3)．

4. 以 5 種顏色塗右圖，每個區域用一種顏色，試問每個區域的顏色相異的方法數．

1	2	3

解：由 5 種顏色中取 3 色依序塗上，

得 $P_3^5=5\times4\times3=60$ 種．

5. 有同樣大小的旗子六面，其中三面藍色，二面紅色，一面黃色．假如將這六面旗子任意排列順序，就可表示一種信號，試求可排出的信號數．

解：三藍、二紅、一黃的排列數 $\dfrac{6!}{3!2!1!}=60$ 種．

6. 因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水．若要求停水的 2 天不相連，則自來水公司共有多少種選擇方法？

解：（全部方法）－（兩天相連的方法）

$=C_2^7-6=15$ 種．

進階題（每題 5 分,共 45 分）

1. 甲、乙、丙、丁、戊 5 人排成一列，試求：

   (1)甲不排首位的排法數．

   (2)甲不排首位，乙不排中的排法數．

   解：(1)（全部的排法）－（甲排首的排法）

   $=5!-4!=96$ 種．

   (2)（全部排法）－（甲排首）－（乙排中）＋（甲排首且乙排中）

   $=5!-4!-4!+3!=78$ 種．

2. 甲、乙、丙、丁、戊 5 人排成一列，試求：

   (1)甲乙相鄰的排法數．

   (2)甲乙相鄰且丙丁相鄰的排法數．

   解：(1)甲乙相鄰的排法有 2!種，

   甲乙、丙、丁、戊的排法有 4!種，得 $2!\times4!=48$ 種．

   (2)甲乙相鄰有 2!種，丙丁相鄰有 2!種，

   甲乙、丙丁、戊的排法有 3!種，得 $2!\times2!\times3!=24$ 種．

3. 由 1, 2, 3, 4, 5, 6 共六個數字所組成（數字可重複）的四位數中，

   (1)恰有一個 1 的數字個數．

   (2)含有奇數個 1 的數字個數．

   解：(1)恰有一個 1 的方法數：

   先排 1，$C_1^4=4$ 種；再排其他位置，5^3 種，得 $4\times5^3=500$．

   (2)恰有三個 1 的方法數：

   先排 1，$C_3^4=4$ 種；再排另一位置，5 種，得 $4\times5=20$，

   知 $500+20=520$（個）．

4. 相同的原子筆 4 枝，鉛筆 3 枝，試求：
(1)分給 7 位同學，每人恰得 1 枝筆的分法有幾種？
(2)分給 10 位同學，每人最多 1 枝筆的分法有幾種？

解：(1)由排列公式，得 $\dfrac{7!}{4!3!}=35$ 種．

(2)原子筆 4 枝，鉛筆 3 枝，空氣 3 袋，

得 $\dfrac{10!}{4!3!3!}=4200$ 種．

5. 有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人，試求：
(1)任選 5 人的方法數．
(2)任選 5 人再排成一列的方法數．

解：(1) $C_5^7=\dfrac{7!}{5!2!}=21$ 種．

(2) $C_5^7\times 5!=21\times 120=2520$ 種．

6. 有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人排成一列，試求：
(1)甲在乙的左方的排法數．
(2)甲在乙的左方且乙在丙的左方的排法數．

解：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人排成一列的排法 $7!=5040$．

(1)甲在乙的左方，排列數為原來的 $\dfrac{1}{2}$，$5040\times\dfrac{1}{2}=2520$ 種．

(2)甲–乙–丙的排列數為原來的 $\dfrac{1}{6}$，$5040\times\dfrac{1}{6}=840$ 種．

7. 由 6 位男生，4 位女生中選出一個 5 人委員會，試求：
(1)男生女生至少各有 2 人的選法數．
(2)男生最多有 2 人的選法數．

解：(1)（男生 2 人女生 3 人）+（男生 3 人女生 2 人）

$=C_2^6\times C_3^4+C_3^6\times C_2^4=60+120=180$ 種．

(2)（男生 1 人女生 4 人）+（男生 2 人女生 3 人）

$=C_1^6\times C_4^4+C_2^6\times C_3^4=6+60=66$ 種．

8. 設 $x+y+z=7$，試求下列各種解法的組數：

(1)非負整數解．

(2)正整數解．

解：(1) $x+y+z=7$，

得 $H_7^3=C_7^9=36$ 組．

(2)令 $x=x_0+1$， $y=y_0+1$， $z=z_0+1$， 其中 x_0, y_0, z_0 是非負整數，

得 $(x_0+1)+(y_0+1)+(z_0+1)=7$，

即 $x_0+y_0+z_0=4$，

知 $H_4^3=C_4^6=15$ 組．

9. 將三件相同的禮物分給 5 個人，試求：

(1)每人可重複取得的方法數．

(2)每人最多一件的方法數．

解：(1)甲+乙+丙+丁+戊=3，

得 $H_3^5=C_3^7=35$ 種．

(2)由 5 人中任取 3 人，每人各分一件，

得 $C_3^5\times1=10$ 種．

情境模擬題（共 25 分）

1. 在數線上有一個運動物體從原點出發；在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點，若經過 6 次跳動後運動物體落在點+4 處，則此運動物體共有__6__種不同的跳動方法．（8 分）

   解：由題意知有 5 次正方向 1 次負方向，

   即+, +, +, +, +, –的直線排列 $\dfrac{6!}{5!}=6$ 種．

2. 某桌球隊要從 10 名選手中排出 5 名，分別參加五場單打友誼賽，10 名選手中近況特佳的有 3 位，教練決定任意安排他們分別在第一、三、五場出賽，另外兩場則由其餘選手任意選出排定，則此球隊出場比賽的名單順序一共可以有多少種？（8 分）

   解：第一、三、五場的 3 位選手 $3!=6$ 種，

   第二、四場時，自其他 7 位選 2 位再排定 $C_2^7\cdot 2!=42$ 種，

   得 $6\times 42=252$ 種．

3. 某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞臺、4 個綜藝臺及 2 個體育臺共三種類型．若同類型電視臺的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育臺，則頻道的分配方式共有__576__種．（9 分）

   解：先排體育臺有 $2!=2$ 種，新聞臺相鄰的順序有 $3!=6$ 種，

   綜藝臺相鄰的順序有 $4!=24$ 種，

   新聞臺與綜藝臺的順序有 $2!=2$ 種，得 $2\times 6\times 24\times 2=576$（種）.