1-2　級數

實力養成

基礎題（**每題** 5 **分**,**共** 30 **分**）

1. 設數列〈 a_n 〉的前 n 項和 $S_n=n^2+n$，試問下列何者不正確？

(1) $a_1=2$　(2) $a_2=6$　(3) $a_n=2n$　(4)〈 a_n 〉是等差數列．

解：(1) $a_1=S_1=2$ ．

(2) $a_2=S_2-S_1=4$ ．

(3) $a_n=S_n-S_{n-1}=2n$ ．

(4)〈 a_n 〉是首項 $a_1=2$，公差為 2 的等差數列．故選(2)．

2. 設數列〈 b_n 〉的前 n 項和 $S_n=3\cdot 2^n-3$，試問下列何者不正確？

(1) $b_1=3$　(2) $b_2=12$　(3) $b_n=3\cdot 2^{n-1}$　(4)〈 b_n 〉是等比數列．

解：(1) $b_1=S_1=3$ ．

(2) $b_2=S_2-S_1=6$ ．

(3) $b_n=S_n-S_{n-1}=3\cdot 2^{n-1}$ ．

(4)〈 b_n 〉是首項 $a_1=3$，公比為 2 的等比數列．故選(2)．

3. 有關 Σ 的運算中，試問下列何者不正確？

(1) $\sum_{k=1}^{n}5=5n$　(2) $\sum_{k=1}^{n}k=nk$　(3) $\sum_{k=1}^{n}5k=5\sum_{k=1}^{n}k$　(4) $\sum_{k=1}^{n}k^3=(\sum_{k=1}^{n}k)^2$ ．

解：(1) $\sum_{k=1}^{n}5=5+5+\cdots+5=5n$ ．

(2) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ．

(3) $\sum_{k=1}^{n}5k=5+10+\cdots+5n=5\sum_{k=1}^{n}k$ ．

(4) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=[\frac{n(n+1)}{2}]^2=(\sum_{k=1}^{n}k)^2$ ．故選(2)．

4. 試求由 1 到 100 的正整數中，所有 7 的倍數的總和．

解：等差數列 7, 14, 21, 28, $\cdots$, 98 共有 14 項，

由等差級數的公式，得 $S=\frac{14}{2}(7+98)=735$ ．

5. 等差數列〈a_n〉，前面 n 項的和 $S_n=5n^2+n$，試問公差．

解：$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(5n^2+n)-[5(n-1)^2+(n-1)]$

$=10n-4$，

知公差 $d=10$ ．

6. 試求等比級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1024}$ 的和．

解：$a_1=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{2}$, $n=10$，

$$S_{10}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}[1-(\frac{1}{2})^{10}]=\frac{1023}{1024}$$ ．

進階題（**每題 5 分,共 45 分**）

1. 數列 $a_1+3,\ a_2+6,\ \cdots,\ a_k+3k,\ \cdots,\ a_{10}+30$ 共有 10 項，且其和為 300，試問 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 的值．

解：$(a_1+3)+(a_2+6)+\cdots+(a_{10}+30)=300$，

$(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(3+6+\cdots+30)=300$，

因 $3+6+9+\cdots+30=165$，

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=300-165=135$．

2. 已知等差數列共有 10 項，且知奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，試求此數列的公差．

解：設等差數列的公差為 d，則

$$\begin{cases} a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=15\cdots\cdots① \\ a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=30\cdots\cdots② \end{cases},$$

由 ②−①，得 $(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)+(a_8-a_7)+(a_{10}-a_9)=15$，

$5d=15$，得 $d=3$．

3. 等比數列〈 a_n 〉的前 n 項和 S_n 與第 n 項 a_n 滿足 $4S_n=4+a_n$，試問此數列的公比．

解：$n=1$ 時，$4S_1=4+a_1$，因 $S_1=a_1$，得 $a_1=\dfrac{4}{3}$，

$n=2$ 時，$4S_2=4+a_2$，因 $a_1=\dfrac{4}{3}$，

$4(a_1+a_2)=4+a_2$，得 $a_2=-\dfrac{4}{9}$，

由 $a_2=a_1\cdot r$，得 $r=-\dfrac{1}{3}$．

4. 有一等比數列，首三項的和為 13，首六項的和為 364，試問此數列的公比．

解：設〈 a_n 〉為等比數列，首項為 a，公比為 r，

$a+ar+ar^2=13$，

$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5$

$=(a+ar+ar^2)+r^3(a+ar+ar^2)$

$=13+13r^3$ ．

由 $13+13r^3=364$，得 $r^3=27$，知 $r=3$ ．

5. 請逐項展開 $\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$ 並求其和．

解：$\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$，表 $a_k=3k-1$ 的等差級數，

$\sum_{k=1}^{10}(3k-1)=2+5+8+\cdots+29=155$ ．

6. 已知等差級數 $4+7+10+13+\cdots+301$，試用 $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$ 的形式表示．

解：因一般項 $a_n=3n+1$，知 $a_k=3k+1$，

$4+7+10+13+\cdots+301$，共有 100 項，

因此可表示為 $\sum_{k=1}^{100}(3k+1)$ ．

7. 等比數列〈 a_n 〉的前 n 項和為 S_n，且 S_6 是 S_3 的 9 倍，試問此數列的公比？

解：設首項為 a，公比為 r，

$S_3=a+ar+ar^2$，

$S_6=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5$

$=(a+ar+ar^2)+r^3(a+ar+ar^2)=(1+r^3)\cdot S_3$，

由 $1+r^3=9$，知 $r=2$ ．

8. 請善用 Σ 的運算公式，試求級數 $1\times 2+2\times 3+\cdots+k(k+1)+\cdots+99\times 100$ 的和．

解：數列的第 k 項，$a_k=k(k+1)$，

得原式 $=\sum_{k=1}^{99}k(k+1)=\sum_{k=1}^{99}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{99}k^2+\sum_{k=1}^{99}k$

$$=\frac{99\times 100\times 199}{6}+\frac{99\times 100}{2}=333300\ .$$

9. 請善用 Σ 的運算公式，試求級數 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+24)$ 的和．

解：數列的第 k 項，$a_k=1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，

得原式 $=\sum_{k=1}^{24}\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{1}{2}(\sum_{k=1}^{24}k^2+\sum_{k=1}^{24}k)$

$$=\frac{1}{2}(\frac{24\times 25\times 49}{6}+\frac{24\times 25}{2})=2600\ .$$

情境模擬題（共 25 分）

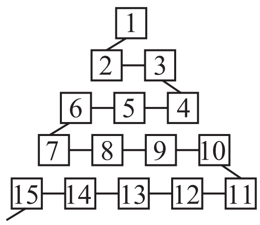
1. 某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位．小明坐在正中間那一排（即第 13 排），發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有 ___1600___ 個座位．（8 分）

解：第 n 排的座位數為 a_n，則〈 a_n 〉為等差數列且公差為 2，

$a_1+a_{25}=a_2+a_{24}=\cdots=2a_{13}=2\times64$，

得 $S_{25}=\dfrac{25(a_1+a_{25})}{2}=25\times64=1600$（個）．

2. 右圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型；數字 1 出現在第一列；數字 2, 3 出現在第 2 列；數字 6，5，4（從左至右）出現在第 3 列；數字 7，8，9，10 出現在第 4 列；依此類推，試問：
(1)第 20 列最右邊的數字．（4 分）
(2)第 21 列，從右至左，第 12 個數字．（4 分）



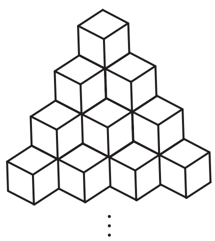
解：(1)第 20 列最右邊的數字為

$1+2+3+\cdots+20=210$．

(2)第 21 列的數字由右到左為

211, 212, 213, …，第 12 個數字為 $210+12=222$．

3. 右圖是由一堆積木所組成，已知第一層有 1 個，第 2 層有 3 個，第 3 層有 6 個，…，依此規則堆成 12 層，試問：
(1)第 k 層的積木個數（用 k 表示）．（4 分）
(2)全部積木的總個數．（5 分）



解：(1)第 k 層有 $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$（個）．

(2) $S_{12}=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+12)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\frac{k(k+1)}{2}=364$（個）．