1-1　數列

實力養成

基礎題（每題 5 分,共 30 分）

1. 設〈 a_n 〉，〈 b_n 〉都是等差數列，試問下列何者是等比數列？

   (1)〈 a_n+2 〉　(2)〈 $3a_n$ 〉　(3)〈 a_n+b_n 〉　(4)〈 2^{a_n} 〉．

   解：設 $a_n=a_1+(n-1)d$， $b_n=b_1+(n-1)t$，

   (1) $a_n+2=(a_1+2)+(n-1)d$， 首項 a_1+2， 公差 d．

   (2) $3a_n=3a_1+(n-1)3d$， 首項 $3a_1$， 公差 $3d$．

   (3) $a_n+b_n=(a_1+b_1)+(n-1)(d+t)$， 首項 a_1+b_1， 公差 $d+t$．

   (4) $2^{a_n}=2^{a_1+(n-1)d}=2^{a_1}\cdot(2^d)^{n-1}$ 是首項 2^{a_1}， 公比 2^d 的等比數列．故選(4)．

2. 設〈 c_n 〉，〈 d_n 〉都是等比數列，試問下列何者不一定是等比數列？

   (1)〈 c_n+2 〉　(2)〈 $3c_n$ 〉　(3)〈 $c_n^{\ 2}$ 〉　(4)〈 $c_n\cdot d_n$ 〉．

   解：設 $c_n=c_1\cdot r^{n-1}$， $d_n=d_1\cdot k^{n-1}$，

   (1) $c_n+2=c_1\cdot r^{n-1}+2$， 不一定是等比數列．

   (2) $3c_n=3c_1\cdot r^{n-1}$， 首項 $3c_1$， 公比 r．

   (3) $c_n^{\ 2}=c_1^{\ 2}\cdot(r^2)^{n-1}$， 首項 $c_1^{\ 2}$， 公比 r^2．

   (4) $c_n\cdot d_n=(c_1\cdot d_1)(rk)^{n-1}$， 首項 c_1d_1， 公比 rk．故選(1)．

3. 數列〈 a_n 〉中，已知 $a_1=2$，試問下列何者使〈 a_n 〉是等差數列？

   (1) $a_{n+1}=a_n+2$　(2) $a_{n+1}=2a_n$　(3) $a_{n+1}=a_n+n$　(4) $a_{n+1}=2a_n+2$．

   解：(1) $a_{n+1}=a_n+2$， $a_n=2n$， 為等差數列．

   (2) $a_{n+1}=2a_n$， $a_n=2^n$， 為等比數列．

   (3) $a_{n+1}=a_n+n$， 不是等差數列．

   (4) $a_{n+1}=2a_n+2$， 不是等差數列．故選(1)．

4. 在 -5 與 28 之間插入 10 個數，取 $a_1=-5$， $a_{12}=28$，使 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$成為等差數列，試問第五項a_5的值．

解： $a_{12}=a_1+11d$ ， 由 $28=-5+11d$ ，

知公差 $d=3$，

$a_5=a_1+4d \quad =-5+12=7$ ．

5. 數列〈 a_n 〉為一等比數列，已知 $a_4=\dfrac{1}{2}$， $a_5=\dfrac{1}{3}$，試問第十項a_{10}的值．

解：因 $a_5=a_4\cdot r$， 得 $r=\dfrac{2}{3}$，

$a_4=a_1\cdot r^3$， 得 $a_1=\dfrac{27}{16}$，

$a_{10}=a_1\cdot r^9 \quad =\dfrac{27}{16}\cdot(\dfrac{2}{3})^9=\dfrac{32}{729}$ ．

6. 設數列〈 a_n 〉滿足$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+(2n+1) \end{cases}$，試求一般項$a_n$ ．

解：由 $a_{n+1}=a_n+(2n+1)$， 知 $a_{n+1}-a_n=2n+1$，

得 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=n^2$ ．

進階題（每題 5 分,共 45 分）

1. 若三數 a, b, c 的和為 39，當三數依序減去 1, 2, 12 時，$a-1, b-2, c-12$ 成為等差數列，試問 b 的值．

解：三數的和為 39，知 $a+b+c=39$ ……①

又 $a-1, b-2, c-12$ 成等差數列，

$2(b-2)=(a-1)+(c-12)$ ……②

由①②得 $b=10$．

2. 設數列〈 a_n 〉滿足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_n$，試求第十項 a_{10} 的值．

解：$a_1=1$， $a_2=a_1=1$， $a_3=a_1+a_2=2$，

$a_4=a_1+a_2+a_3=(a_1+a_2)+a_3=2a_3=2^2$，

同理 $a_5=2a_4$， 知 $a_{n+1}=2a_n$ （ $n\geq 2$ ），

$$a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{10}}{a_9}$$

$$=1\times1\times2\times\cdots\times2=2^8=256$$ ．

3. 設數列〈 a_n 〉滿足 $\begin{cases}a_1=2\\a_{n+1}=3a_n+2\end{cases}$，

(1)若將遞迴關係式改寫為 $(a_{n+1}+k)=3(a_n+k)$，試問 k 值．（2 分）

(2)試求數列的一般項 a_n ．（3 分）

解：(1) $a_{n+1}+k=3a_n+3k$， 即 $a_{n+1}=3a_n+2k$，

由 $2k=2$， 知 $k=1$ ．

(2)因 $(a_{n+1}+1)=3(a_n+1)$， 知 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$，

$$a_n+1=(a_1+1)\times\frac{a_2+1}{a_1+1}\times\frac{a_3+1}{a_2+1}\times\cdots\times\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=3\times3\times\cdots\times3=3^n,$$

得 $a_n=3^n-1$ ．

4. 設數列〈 a_n 〉滿足 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2^{2n+1} \cdot a_n \end{cases}$ ，試求一般項 a_n ．

解：由 $a_{n+1} = 2^{2n+1} \times a_n$ 知 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{2n+1}$,

$$a_n = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$= 2 \times 2^3 \times 2^5 \times \cdots \times 2^{2n-1}$$

$$= 2^{1+3+5+\cdots+(2n-1)} = 2^{n^2}$$ ．

5. 已知 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$ ，試問：

(1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3$ 的值．（2 分）

(2) $16^3 + 17^3 + 18^3 + \cdots + 24^3$ 的值．（3 分）

解：(1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3$

$$= (1+2+3+\cdots+15)^2 = 120^2 = 14400$$ ．

(2) $16^3 + 17^3 + 18^3 + \cdots + 24^3$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 24^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3)$$

$$= (1+2+3+\cdots+24)^2 - (1+2+3+\cdots+15)^2$$

$$= 300^2 - 120^2 = 75600$$ ．

6. 觀察下列數列，並善用遞迴關係．

$a_1 = 1$， $a_2 = 1+2+1$， $a_3 = 1+2+3+2+1$， $a_4 = 1+2+3+4+3+2+1$， $\cdots$，

$a_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1$ ．

(1)試問 a_{n+1} 與 a_n 的關係．（2 分）

(2)試將 a_n 表成 n 的函數．（3 分）

解：(1) $a_{n+1} = 1+2+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1$

$$= a_n + (n+1) + n$$,

知 $a_{n+1} = a_n + (2n+1)$ ．

(2) $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$$= 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$ ．

7. 請善用數學歸納法，證明：

對所有正整數 n，8^n+6 恆為 7 的倍數．

證：(1)當 $n=1$ 時，得 $8^1+6=14$ 是 7 的倍數．

(2)設 $n=k$ 時成立，即 $8^k+6=7t$ 是 7 的倍數，

則 $n=k+1$ 時，

$8^{k+1}+6=8\cdot 8^k+6=8(8^k+6)-42=8\cdot 7t-42=7(8t-6)$ 也是 7 的倍數．

故 $n=k+1$ 時原式成立，由數學歸納法得證．

8. 已知 n 是正整數，且 $3\cdot 7^n+2\cdot 2^n$ 恆為某質數 P 的倍數．

(1)試求質數 P．（2 分）

(2)請用數學歸納法證明你的推測．（3 分）

解：(1) $n=1$ 時，得 $3\cdot 7+2\cdot 2=25$，推得 $P=5$．

(2)① $n=1$ 時，原式 $=25$ 是 5 的倍數．

②設 $n=k$ 時成立，即 $3\cdot 7^k+2\cdot 2^k=5t$ 是 5 的倍數，

則 $n=k+1$ 時，$3\cdot 7^{k+1}+2\cdot 2^{k+1}$

$=21\cdot 7^k+4\cdot 2^k=2(3\cdot 7^k+2\cdot 2^k)+15\cdot 7^k$

$=2\cdot 5t+15\cdot 7^k=5(2t+3\cdot 7^k)$．

故 $n=k+1$ 時原式成立，由數學歸納法得證．

9. 請善用數學歸納法，證明：

對所有正整數 n，$1\cdot 4+2\cdot 5+\cdots+n(n+3)=\dfrac{n(n+1)(n+5)}{3}$．

證：(1)當 $n=1$ 時，左式 $=4$，右式 $=4$，原式成立．

(2)設 $n=k$ 時成立，即 $1\cdot 4+2\cdot 5+\cdots+k(k+3)=\dfrac{k(k+1)(k+5)}{3}$，

則 $n=k+1$ 時，$1\cdot 4+2\cdot 5+\cdots+k(k+3)+(k+1)(k+4)$

$$=\frac{k(k+1)(k+5)}{3}+(k+1)(k+4)$$

$$=\frac{k+1}{3}\cdot[k(k+5)+3(k+4)]$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+6)}{3}=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+5]}{3}.$$

故 $n=k+1$ 時原式成立，由數學歸納法得證．

情境模擬題（共 25 分）

1. 某種細菌在培養過程中，每 1 小時分裂一次（一個分裂成兩個），已知最初培養皿中的細菌只有 1 個，試問欲使細菌的個數超過 1000 個時，至少需要幾小時才能達到？（取整數）（8 分）

解：第 $1, 2, \cdots, n$ 小時，細菌的個數分裂為 $2, 2^2, \cdots, 2^n$，

知 $2^n > 1000$，得 $n \geq 10$，至少需要 10 小時．

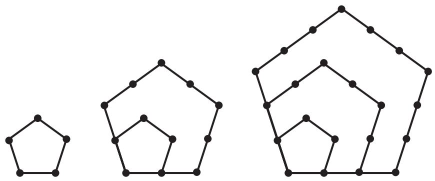
2. 假設世界人口自 1980 年起，50 年內每年增長率均固定，已知 1987 年世界人口達 50 億，1999 年第 60 億人誕生在賽拉佛耶．請根據這些資料推測 2023 年世界人口最接近幾億？（取整數）（8 分）

解：1987，1999，2011，2023 年的人口成等比數列

50，60，$60r$，$60r^2$，知 $r = 1.2$，

得 2023 年的人口為 $60 \times 1.2 \times 1.2 \approx 86$（億）．

3. 圖中的黑點分別落在正五邊形的頂點或邊上，且同一邊上任兩相鄰的黑點等距離，圖(一)有 5 個黑點，圖(二)有 12 個黑點，圖(三)有 22 個黑點，令 a_n 表示第 n 個圖中的黑點總數．



圖(一)　圖(二)　圖(三)　⋯

(1)試問 a_{n+1} 與 a_n 的關係．（4 分）

(2)試將 a_n 表成 n 的關係．（5 分）

解：(1) $a_1 = 5$，$a_2 = a_1 + 7$，$a_3 = a_2 + 10$，$\cdots$，

$a_{n+1} = a_n + (3n+4)$．

(2) $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 5 + 7 + 10 + \cdots + (3n+1)$

$= \dfrac{1}{2}(3n^2 + 5n + 2)$．