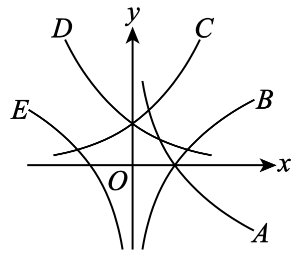
第三章　總複習

基礎題

<單選題>（每題 6 分,共 18 分）

1. 設 $a>1$，若 $y=f(x)=a^{-x}$ 與 $y=g(x)=\log_a x$ 的圖形皆在右圖中，則右列的圖形中，何者為 $y=f(-x)$ 與 $y=-g(x)$ 的圖形？



(1)BA　(2)CA　(3)DA　(4)CE　(5)DE．

解：$f(-x)=a^x$，知 $y=f(-x)$ 的圖形為 C，

$-g(x)=-\log_a x=\log_{\frac{1}{a}} x$ 知 $y=-g(x)$ 的圖形為 A，故選(2)．

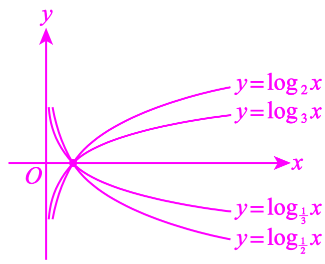
2. 若 $x>1$，且 $\log_a x<\log_b x<0$，則下列敘述何者正確？

(1) $0<a<b<1$　(2) $0<b<a<1$　(3) $a>b>1$　(4) $b>a>1$　(5) $a>1>b>0$．

解：作 $y=\log_2 x$，$y=\log_3 x$，$y=\log_{\frac{1}{3}} x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，

因 $x>1$ 且 $\log_a x<\log_b x<0$，

知 $0<b<a<1$，故選(2)．



3. 下列各數值中，哪一個最大？

(1) $\log_6 14$　(2) $\log_5 11$　(3) $\log_4 8$　(4) $\log_3 5$　(5) $\log_2 0.8$．

解：$\log_6 14=\dfrac{\log 14}{\log 6}\approx 1.47$，

$\log_5 11=\dfrac{\log 11}{\log 5}\approx 1.49$，

$\log_4 8=1.5$，

$\log_3 5\approx 1.47$，

$\log_2 0.8<0$．

故選(3)．

＜多選題＞（每題 10 分,共 30 分）

4. 下列敘述何者正確？

(1) $\log_2(-3)^2 = 2\log_2(-3)$　(2) $\log_{\sqrt{3}} 7 = \log_3 49$　(3) $7^{\log 8} = 8^{\log 7}$

(4) $\log_{77} 3 = \log_7 3 + \log_{11} 3$　(5) $\log_{79} 5 = \log_{79} 2 \times \log_{79} 3$.

解：由對數的意義，知 $\log_2(-3)$ 不存在，

由對數的定律及換底公式，知(2)(3)正確 .

5. 下列敘述何者正確？

(1) $2^{30} > 3^{20}$ (2) $20^{30} > 30^{20}$　(3) $0.2^{0.3} > 0.3^{0.2}$　(4) $2^{49} > 3^{31}$　(5) $2^{0.945} + 2^{0.755} > 2^{1.7}$.

解：(1) $\log 2^{30} = 30 \cdot \log 2 \approx 9.03$，$\log 3^{20} = 20\log 3 \approx 9.542$，知 $2^{30} < 3^{20}$.

(2) $\log 20^{30} = 30\log 20 \approx 39.03$，$\log 30^{20} = 20\log 30 \approx 29.542$，知 $20^{30} > 30^{20}$.

(3) $\log 0.2^{0.3} = 0.3\log\frac{1}{5} \approx -0.2097$，$\log 0.3^{0.2} = 0.2\log\frac{3}{10} \approx -0.105$，知 $0.2^{0.3} < 0.3^{0.2}$.

(4) $\log 2^{49} = 49\log 2 \approx 14.749$，$\log 3^{31} = 31 \cdot \log 3 \approx 14.79$，知 $2^{49} < 3^{31}$.

(5) $2^{0.945} + 2^{0.755} \geq 2\sqrt{2^{0.945} \cdot 2^{0.755}} = 2^1 \cdot 2^{0.85} = 2^{1.85} > 2^{1.7}$，知 $2^{0.945} + 2^{0.755} > 2^{1.7}$.

故選(2)(5) .

6. 若 $x > 0$，則下列敘述何者恆成立？

(1) $2^x \geq (\frac{1}{2})^x$　(2) $\log_2 x \geq \log_{\frac{1}{2}} x$　(3) $\log_2 x \geq \log_3 x$

(4) $2^x \geq \log_{\frac{1}{2}} x$　(5) $2^x \geq \log_2 x$.

解：(1) $y = 2^x$ 與 $y = 2^{-x}$ 圖形，知 $x > 0$ 時 $2^x \geq (\frac{1}{2})^x$.

(2) $y = \log_2 x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 圖形，知 $x \geq 1$ 時才成立 .

(3) $y = \log_2 x$ 與 $y = \log_3 x$ 圖形，知 $x \geq 1$ 時才成立 .

(4) $y = 2^x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 圖形，知不一定成立 .

(5) $y = 2^x$ 與 $y = \log_2 x$ 圖形，知 $x > 0$ 時，$2^x \geq \log_2 x$.

故選(1)(5) .

進階題（共 52 分）

1. 設 $2^a=7$， $\log_7 3=b$，若 $\log_{98}63=\dfrac{kab+a}{2a+1}$，則 k 之值為__2__．（8 分）

解： $2^a=7$，得 $a=\log_2 7$， $b=\log_7 3$，知 $ab=\log_2 3$，

$\log_{98}63=\dfrac{\log_2 63}{\log_2 98}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 7}{2\log_2 7+\log_2 2}=\dfrac{2ab+a}{2a+1}$，知 $k=2$ ．

2. 若 a, b, c 為正整數，已知 $a\log_{270}2+b\log_{270}3+c\log_{270}5=2$，則 a 為．（8 分）

解： $a\log_{270}2+b\log_{270}3+c\log_{270}5=\log_{270}2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$

得 $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c=270^2=(2\cdot 3^3\cdot 5)^2=2^2\cdot 3^6\cdot 5^2$，知 $a=2$ ．

3. 設 $\log_a\alpha=\log_b\beta=\log_{\sqrt{ab}}10$，已知 $\alpha\neq\beta$，則 $\alpha\beta=$__100__．（8 分）

解：令 $\log_a\alpha=\log_b\beta=\log_{\sqrt{ab}}10=k$，

$\alpha=a^k$， $\beta=b^k$， $10=(\sqrt{ab})^k=ab^{\frac{k}{2}}$，

$\alpha\beta=a^k\cdot b^k=(ab)^k=[(ab)^{\frac{k}{2}}]^2=10^2=100$ ．

4. 設 $f(x)=3^x+3^{-x}$，若 α， β 為 $f(x)=\sqrt{40}$ 的解，則 $\alpha+\beta=$__0__．（8 分）

解： $f(-x)=3^{-x}+3^x=f(x)$，

知若 α 是 $f(x)=\sqrt{40}$ 的一解，則 $-\alpha$ 也是 $f(x)=\sqrt{40}$ 的另一解，

$\beta=-\alpha$，得 $\alpha+\beta=\alpha-\alpha=0$ ．

5. 將等比數列 $\dfrac{2}{3}$， $(\dfrac{2}{3})^2$， $(\dfrac{2}{3})^3$，…逐項化成小數，首次在小數點以下第 4 位才開始出現不為 0 的數字為第 n 項，且該數字為 a，則數對 $(n,a)=$__(18,6)__．（10 分）

解：依題意： $(\dfrac{2}{3})^n<10^{-3}$，即 $(\dfrac{3}{2})^n>10^3$，

$\log(\dfrac{3}{2})^n>\log 10^3$，知 $n\times 0.1761>3$， $n>17.03\cdots$，知 $n\geq 18$，

而 $\log(\dfrac{2}{3})^{18}=18\log\dfrac{2}{3}\approx -3.1698=-4+0.8302$，因 $\log 6<0.8302<\log 7$，得 $a=6$ ．

6. 小康在大學時期以信用卡與現金卡借款度日，以致大學畢業時共積欠銀行 100 萬元，依照當初與銀行約定畢業後以年利率 18%，每月複利計息一次．

小康畢業後立即找到一份月薪 2 萬 3 仟元的工作，小康準備省吃儉用償還債務，扣除生活費之後每月最多只能償還 2 萬元．依此計劃，小康至少需 <u>8</u> 年才能還清此債務？（ $\log 1.01 \approx 0.0043$， $\log 1.02 \approx 0.0086$ ）（10 分）

解：貸款的本利和 $S_1 = 10^6(1+0.015)^n$，

還款的總和 $S_2 = 20000 + 20000(1+0.015) + \cdots + 20000(1+0.015)^{n-1}$

$$= \frac{20000\left[(1.015)^n - 1\right]}{1.015 - 1},$$

由 $S_2 \geq S_1$， $(1.015)^n \geq 4$， 又 $\log 1.015 \approx 0.00645$

$n \log 1.015 \geq 0.6020$， $n \approx 94$（月）≈ 8年．