# 第二章　總複習

## 基礎題

＜單選題＞（每題 6 分,共 18 分）

1. 某生演算多項式的除法，以 $x-a$ 除 $x^3+px^2+qx-15$ 時，將常數項 $-15$ 誤看爲 15，試算所得的餘式爲 7，試求正確的餘式爲下列何者？
(1)37　(2)22　(3)7　(4) $-8$　(5) $-23$ .

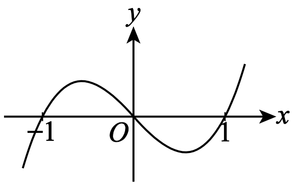
**解**： $x^3+px^2+qx+15=(x-a)Q(x)+7$ ,

而 $x^3+px^2+qx-15=x^3+px^2+qx+15-30$

$=[(x-a)Q(x)+7]-30$

$=(x-a)Q(x)-23$ ,

故選(5) .



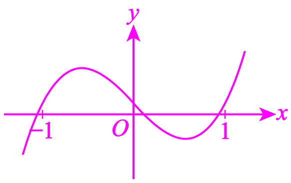

2. 已知 $y=x(x-1)(x+1)$ 的圖形如右，若 $f(x)=x(x-1)(x+1)+0.01$，則 $f(x)=0$ 有多少個正實根？
(1)0　(2)1　(3)2　(4)3　(5)4 .

**解**： $y=x(x-1)(x+1)+0.01$ 的圖形是

$y=x(x-1)(x+1)$ 圖形上移 0.01 單位而得，

知有一根小於 $-1$，另二根介於 0 與 1 之間，

共有 2 個正實根 .




3. 設 $f(x)=ax^{10}-bx^6+7x-\sqrt{7}$ ，其中 $a$，$b$ 爲非零的實數，試問 $f(3)-f(-3)$ 的值爲何？(1) $-42$　(2) $-21$　(3)0　(4)21　(5)42 .

**解**： $f(3)=a(3)^{10}-b(3)^6+7\times 3-\sqrt{7}$ ,

$f(-3)=a(-3)^{10}-b(-3)^6-7\times 3-\sqrt{7}$ ，得 $f(3)-f(-3)=42$ .

故選(5) .

**＜多選題＞（每題 10 分,共 30 分）**

4. 設有理係數多項式 $f(x)=6x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$，則下列何者正確？
   (1) $f(x)=0$ 必有實根　(2)若 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間有實根，則 $f(1)f(2)<0$
   (3)若 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 的根，則 $1-i$ 必為 $f(x)=0$ 的另一根
   (4)若 $1+\sqrt{2}$ 為 $f(x)=0$ 的根，則 $1-\sqrt{2}$ 必為 $f(x)=0$ 的另一根
   (5) $2x+3$ 不可能是 $f(x)$ 的因式．

   **解**：(1)奇次項的實係數方程式，至少有一個實根．
   (2)在 1 與 2 之間有偶數個實根時，$f(1)f(2)>0$．
   (3)由虛根成對定理知正確．
   (4)有理係數方程式，無理根成對，知正確．
   (5)使用牛頓定理時，$f(x)$ 必須是整係數多項式．
   故選(1)(3)(4)．

5. 設實係數多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$，已知 $f(x)=0$ 只有一個實根 $2+\sqrt{5}$，則下列何者必為正數？
   (1) $f(1)$　(2) $f(3)$　(3) $f(5)$　(4) $f(7)$　(5) $f(9)$．

   **解**：因 $f(0)=-1<0$，而且 $f(x)=0$ 只有一個實根 $2+\sqrt{5}$，
   由勘根定理知：
   當 $t<2+\sqrt{5}$ 時，$f(t)<0$，知 $f(1)<0$，$f(3)<0$，
   當 $t>2+\sqrt{5}$ 時，$f(t)>0$，知 $f(5)>0$，$f(7)>0$，$f(9)>0$，
   故選(3)(4)(5)．

6. 下列哪一個不等式的解為 $x<1$ 或 $x>3$？
   (1) $(x-2)^2>1$　(2) $(x-1)(x-3)(x^2+x+1)>0$　(3) $(x-1)^3(x-3)>0$
   (4) $(x+1)^2(x-1)(x-3)>0$　(5) $(x^2-1)(x^2-9)(x^2+4x+3)>0$．

   **解**：(1) $x^2-4x+3>0$，$(x-1)(x-3)>0$，知 $x<1$ 或 $x>3$．
   (2)因 $x^2+x+1>0$ 恆成立，即 $(x-1)(x-3)>0$，知 $x<1$ 或 $x>3$．
   (3) $(x-1)^3$ 與 $(x-1)$ 同號，即 $(x-1)(x-3)>0$，知 $x<1$ 或 $x>3$．
   (4) $(x-1)(x-3)>0$ 且 $x\neq-1$．
   (5) $(x+1)^2(x+3)^2(x-1)(x-3)>0$，即 $(x-1)(x-3)>0$ 且 $x+1\neq0$，$x+3\neq0$，
   知 $x<1$ 或 $x>3$，且 $x\neq-1$ 和 $-3$．　故選(1)(2)(3)．

**進階題**（共 52 分）

1. 設 $f(x)$ 爲實係數三次多項式，已知 $f(1)=f(2+i)=3$ 且 $f(0)=13$，試求 $f(-1)$ 的值．（8 分）

**解**：設 $g(x)=f(x)-3$，則 $g(1)=g(2+i)=0$ 且 $g(0)=10$，
知 $g(x)=0$ 有三根 1，$2+i$，$2-i$，
$g(x)=a(x-1)(x^2-4x+5)$，
$g(0)=-5a=10$ 知 $a=-2$，
$g(x)=-2(x-1)(x^2-4x+5)$，
$g(-1)=(-2)(-2)(10)=40$，得 $f(-1)=43$．

2. 設 $f(x)=3x^3-5x^2-4x+4$，試解方程式 $f(x)=0$．（8 分）

**解**：由牛頓定理，原式可化爲：$f(x)=(x+1)(x-2)(3x-2)$，
知 $f(x)=0$ 三根爲 $-1$，2，$\frac{2}{3}$．

3. 二次函數 $f(x)$ 滿足以下三個條件：
(1)對所有實數 $t$，恆有 $f(1-t)=f(1+t)$．（2 分）
(2)當 $0\le x\le 4$時，$f(x)$ 的最大值爲 9，最小值爲 0．（3 分）
(3) $f(0)>f(4)$．（3 分）
試求 $f(3)$ 的值．

**解**：條件(1)知圖形的對稱軸爲 $x=1$，
條件(3)知二次函數的開口向下，
條件(2)知 $f(1)=9$，$f(4)=0$，
$f(x)=a(x-1)^2+9$ 時，$f(4)=9a+9=0$，得 $a=-1$，所以 $f(x)=-(x-1)^2+9$，
故 $f(3)=5$．

4. 設 $f(x)$ 是實係數多項式且 $f(2+i)=3+2i$，試求：

(1) $f(2-i)$ .（4 分）　(2) $f(x)$ 除以 $x^2-4x+5$ 的餘式 .（4 分）

**解**：(1) $f(2-i)=f(\overline{2+i})=\overline{f(2+i)}=3-2i$ .

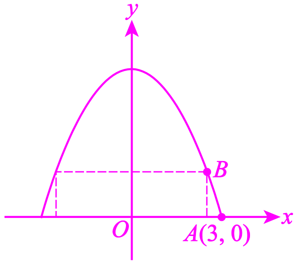
(2)設 $f(x)=(x^2-4x+5)Q(x)+ax+b$，

$f(2+i)=a(2+i)+b=(2a+b)+ai$，

$f(2+i)=3+2i$，得 $a=2$，$b=-1$，知所求餘式為 $2x-1$ .

5. 在只有皮尺沒有梯子的情況下，想要測出一拋物線形拱門的高度．已知此拋物線以過最高點的鉛垂線為對稱軸，現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬為 6 公尺，且距底部 $\frac{3}{2}$ 公尺高處其寬為 5 公尺．利用這些數據可推算出拱門的高度為 $\underline{\;\frac{54}{11}\;}$ 公尺．(化為最簡分數)（10 分）

**解**：圖形坐標化得 $A(3,0)$，$B(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$，

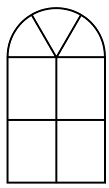



設拋物線方程式 $y=ax^2+b$，兩點代入，

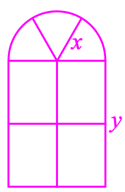
$\begin{cases}0=9a+b\\ \frac{3}{2}=\frac{25}{4}a+b\end{cases}$，得 $a=-\frac{6}{11}$，$b=\frac{54}{11}$，

$y=-\frac{6}{11}x^2+\frac{54}{11}$，知拱門的高度為 $\frac{54}{11}$（公尺）.

6. <u>諾曼第</u>建築的窗戶，其形狀是在一般的長方形上面再加上一個半圓形（如圖），假設整個窗戶的外部周長是 8 公尺時，試求窗戶的最大面積 .（10 分）



**解**：設半圓形的半徑為 $x$ 公尺，長方形的高為 $y$ 公尺，




則周長 $L=\pi x+2x+2y=8$，

面積 $A=\frac{1}{2}\pi x^2+2xy$，$2y=8-\pi x-2x$，

$A=f(x)=-2x^2-\frac{\pi}{2}x^2+8x=-(2+\frac{\pi}{2})x^2+8x$，

而 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{8}{2(2+\frac{\pi}{2})}$ 時有最大值，

即 $x=\frac{8}{4+\pi}$ 時，最大面積 $f(\frac{8}{4+\pi})=\frac{32}{4+\pi}$（平方公尺）.