# 第一章　總複習

## 基礎題

**<單選題>（每題 6 分,共 18 分）**

1. 設正整數 $n\ge 2$，若 $x\ge 0$ 時，不等式 $\sqrt[n]{1+x}\ge 1+\dfrac{1}{n}x$ 恆成立，試問 $a=\sqrt[5]{1.05}$ 在下列哪一個範圍內？
   (1) $1<\alpha\le 1.01$　(2) $1.01<\alpha\le 1.02$　(3) $1.02<\alpha\le 1.03$　(4) $1.03<\alpha\le 1.04$ .

   **解**：$\sqrt[5]{1.05}=\sqrt[5]{1+0.05}\ge 1+\dfrac{1}{5}\times 0.05=1.01$ ,
   又 $(\sqrt[5]{1.05})^5>1=1^5$ 知 $1<\sqrt[5]{1.05}$ ,
   得 $1<\sqrt[5]{1.05}\le 1.01$ ,
   故選(1) .

2. 設 $a$，$b$ 是不為 0 的有理數，試問下列何者必為無理數？
   (1) $a^2+2b$　(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　(3) $\sqrt{ab}$　(4) $a+b\sqrt{2}$ .

   **解**：(1) $a^2$， $2b$ 都是有理數， $a^2+2b$ 必是有理數 .
   (2)$a$，$b$ 是完全平方數時， $\sqrt{a}$， $\sqrt{b}$ 是有理數， $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 未必是無理數 .
   (3)$ab$ 是完全平方數時， $\sqrt{ab}$ 是有理數 .
   (4)因 $b\ne 0$，知 $b\sqrt{2}$ 是無理數，得 $a+b\sqrt{2}$ 是無理數 .
   故選(4) .

3. 設 $a$，$b$ 是不為 0 的實數，試問何者使 $ab<0$ 恆成立？
   (1) $|a|+|b|=|a+b|$　(2) $|a|-|b|=|a+b|$
   (3) $|a|-|b|=|a-b|$　(4) $|a-5|+|b-5|=|a-b|$ .

   **解**：由三角不等式：
   (1)$a$，$b$ 同號 .
   (2)$a$，$b$ 異號，且 $|a|\ge|b|$ .
   (3)$a$，$b$ 同號，且 $|a|\ge|b|$ .
   (4) $(a-5)(b-5)<0$ .
   故選(2) .

**＜多選題＞（每題 10 分,共 30 分）**

4. 若 $n$，$k$ 都是正整數時，$n<\sqrt{k}<n+1$，則 $\sqrt{k}$ 是無理數，試問下列哪些選項一定是無理數？

(1) $\sqrt{n^2+1}$　(2) $\sqrt{n^2+2}$　(3) $\sqrt{n(n+1)}$　(4) $\sqrt{n(n+3)}$ ．

**解**：(1) $n^2<n^2+1<(n+1)^2$，知 $n<\sqrt{n^2+1}<n+1$ ．

(2) $n^2<n^2+2<(n+1)^2$，知 $n<\sqrt{n^2+2}<n+1$ ．

(3) $n^2<n(n+1)<(n+1)^2$，知 $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$ ．

(4) $n=1$ 時，$n(n+3)=(n+1)^2$，知 $\sqrt{1\cdot 4}=2$ 不是無理數．

故選(1)(2)(3)．

5. 設 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，試問下列哪些選項正確？

(1) $\alpha+\beta=1$　(2) $\alpha^2+\beta^2=1$　(3) $\alpha^2-\alpha-1=0$　(4) $\beta^2-\beta-1=0$ ．

**解**：(1) $\alpha+\beta=1$ ．

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\times(-1)=3$ ．

(3) $\alpha^2-\alpha-1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1=0$ ．

(4) $\beta^2-\beta-1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}-1=0$ ．

故選(1)(3)(4)．

6. 設實數 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，下列哪些選項中的值與 $x$ 相等？

(1) $\dfrac{1}{x}+1$　(2) $x^2-1$　(3) $\dfrac{1}{x-1}$ ．

**解**：(1) $\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}+1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=x$ ．

(2) $x^2-1=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}-1=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=x$ ．

(3) $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=x$ ．

故選(1)(2)(3)．

**進階題**（共 52 分）

1. 設 $x$ 爲實數且 $|x+1|+|x-3|=4$，則 $x$ 的範圍爲 $\underline{-1\le x\le 3}$ .（8 分）

**解**：決定 $|x+1|$，$|x-3|$ 正負的 $x$ 有 $-1$，$3$．

(1) $x>3$ 時，$(x+1)+(x-3)=4$，得 $x=3$（不合）.

(2) $-1\le x\le 3$ 時，$(x+1)+(3-x)=4$ 恆成立，得 $-1\le x\le 3$．

(3) $x<-1$ 時，$-(x+1)+(3-x)=4$，得 $x=-1$（不合）.

由(1)(2)(3)知 $-1\le x\le 3$．

2. 設 $x$ 爲實數且 $|x^2+4|=|5x|$，則 $x$ 的最大值爲 $\underline{4}$ .（8 分）

**解**：決定 $|x^2+4|$，$|5x|$ 正負的 $x$ 有 0．

(1) $x\ge 0$ 時，$x^2+4=5x$，得 $x=1$，4．

(2) $x<0$ 時，$x^2+4=-5x$，得 $x=-1$，$-4$．

由(1)(2)知 $x$ 的最大值爲 4．

3. 在坐標平面上，正方形 $ABCD$ 的四個頂點坐標分別爲 $A(0,1)$，$B(0,0)$，$C(1,0)$，$D(1,1)$．設 $P$ 爲正方形 $ABCD$ 內部的一點，若△$PDA$ 與△$PBC$ 的面積比爲 $1:2$，且△$PAB$ 與△$PCD$ 的面積比爲 $2:3$，則 $P$ 點的坐標爲 $\underline{P(\frac{2}{5},\frac{2}{3})}$ .（化成最簡分數）（8 分）

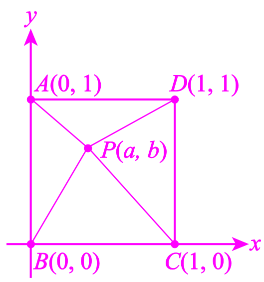
**解**：△$PAB$：△$PCD=2:3$，

由分點公式知 $a=\dfrac{2}{5}$，

△$PDA$：△$PBC=1:2$，

由分點公式知 $b=\dfrac{2}{3}$，

故 $P(\frac{2}{5},\frac{2}{3})$．

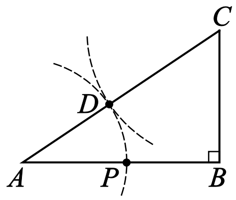


4. 設 $a$，$b$，$c$，$d$ 皆爲正數且滿足 $\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$ 時，$\frac{b}{a}<\frac{b+nd}{a+nc}<\frac{d}{c}$，請比較 $\frac{13}{17}$，$\frac{33}{37}$，$\frac{53}{57}$，$\frac{73}{77}$ 的大小．(8 分)

**解**：因 $\frac{13}{17}<1$，即 $\frac{13}{17}<\frac{20}{20}$，

知 $\frac{13}{17}<\frac{33}{37}<\frac{53}{57}<\frac{73}{77}$ ．

5. 某生使用直尺與圓規作圖，在線段 $\overline{AB}$ 上




(1)作直角△$ABC$，滿足 $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ ．(3 分)

(2)以 $C$ 爲圓心，$\overline{BC}$ 爲半徑畫弧交 $\overline{AC}$ 於 $D$．(3 分)

(3)以 $A$ 爲圓心，$\overline{AD}$ 爲半徑畫弧交 $\overline{AB}$ 於 $P$．(4 分)

試問 $\overline{AP}=k\overline{PB}$ 時的 $k$ 值．

**解**：設 $\overline{BC}=1$，則 $\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=\sqrt{5}$，

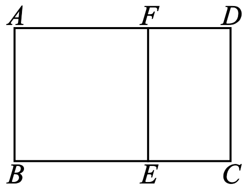
又因 $\overline{CD}=\overline{BC}=1$，得 $\overline{AD}=\sqrt{5}-1$，

即 $\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{5}-1$，

而 $\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP}=2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$，

即 $k=\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ．

6. 建築美學的黃金矩形，是矩形 $ABCD$ 中(如圖)，而 $ABEF$ 爲正方形時，矩形 $ABCD$ 與矩形 $ECDF$ 的形狀相似，試求黃金矩形的長 $\overline{AD}$ 與寬 $\overline{AB}$ 的比值．(10 分)




**解**：設 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AB}$ 的比值爲 $t$，

若 $\overline{AB}=a$，得 $\overline{AD}=at$，$\overline{FD}=at-a$，

由相似形得 $\frac{at}{a}=\frac{a}{at-a}$，即 $t=\frac{1}{t-1}$，

$t^2-t-1=0$ 得 $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ （$t>0$）．