3-5　指數、對數的應用

實力養成

基礎題（每題 5 分,共 30 分）

1. 請用常用對數表求出下列的值：
(1)log 1.47．　(2)log 1.476．

解：(1)由對數表看出 $\log 1.47 = 0.1673$．

(2)由內插法：$\log 1.476 = 0.1673 + 0.0030 \times \frac{6}{10} = 0.1691$．

2. 請用常用對數表求出下列真數的值：
(1) $\log x = 0.1614$．　(2) $\log x = 0.1635$．

解：(1)由表看出 $x = 1.45$．　內插法

(2) $\log x = 0.1635 = 0.1614 + 0.0021 = 0.1614 + 0.0030 \times \frac{7}{10} = \log 1.457$，知 $x = 1.457$．

3. 已知 $\log 1.74 \approx 0.2405$，$\log 1.75 \approx 0.2430$，試求：
(1)log 1.744．　(2)log 17440．　(3)log 0.01744．

解：(1) $\log 1.744 = 0.2405 + 0.0025 \times \frac{4}{10} = 0.2415$．

(2) $17440 = 1.744 \times 10^4$，$\log 17440 = 4 + \log 1.744 = 4.2415$．

(3) $0.01744 = 1.744 \times 10^{-2}$，$\log 0.01744 = -2 + \log 1.744 = -2 + 0.2415 = -1.7585$．

4. 將 3^{100} 展開後是幾位數？（$\log 3 \approx 0.4771$）

解：因 $\log 3^{100} = 100 \log 3 \approx 47 + 0.71$，首數 $47 = \log 10^{47}$，

尾數 $0.71 = \log b$，$1 \le b < 10$，

$\log 3^{100} = \log 10^{47} + \log b = \log(b \times 10^{47})$，

$3^{100} = b \times 10^{47}$，$1 \le b < 10$，知 3^{100} 是 48 位數．

5. 將 $(\frac{3}{5})^{100}$ 表成小數，則小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

解：因 $\log(\frac{3}{5})^{100} = 100 \log(\frac{3}{5}) = 100(\log 3 - \log 5) = -22.19 = -23 + 0.81$，

首數 $-23 = \log 10^{-23}$，尾數 $0.81 = \log b$，$1 \le b < 10$，

$\log(\frac{3}{5})^{100}=\log 10^{-23}+\log b=\log b\times 10^{-23}$， $1\le b<10$， $(\frac{3}{5})^{100}=b\times 10^{-23}$，

知小數點以下第 23 位開始出現不爲 0 的數字．

6. 有一等比數列，首項 $a_1=12$，公比 $r=-2$，前 n 項的和 $S_n=516$，試求此等比數列的項數 n．

解： $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ 知 $516=\dfrac{12[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=4[1-(-2)^n]$，由 $(-2)^n=-128$，得 $n=7$．

進階題（**每題** 6 **分**,**共** 30 **分**）

1. 已知 $10^{2.6464}\approx 443$， $10^{2.6474}\approx 444$，若 $10^x=4437$，試求 x 值（取近似值到小數點以下第四位）

解： $\log 443\approx 2.6464$ 得 $\log 4.43\approx 0.6464$，

$\log 444\approx 2.6474$ 得 $\log 4.44\approx 0.6474$，

由內插法得 $\log 4.437\approx 0.6471$，

$10^x\approx 4437$ 知 $x\approx\log 4437=3+\log 4.437\approx 3.6471$．

2. 滿足 $100\le(1.5)^n\le 500$ 的正整數 n，試問 n 有多少個？

解： $100\le(\frac{3}{2})^n\le 500$，

$2\le n\log\frac{3}{2}\le\log 500$，

$2\le n(0.1761)\le 2.6990$，

$11.35\cdots\le n\le 15.32\cdots$，

$n=12$，13，14，15，共 4 個．

3. 若 $2^{50}+3^{50}$ 的科學記號爲 $a\times 10^n$，其中 n 爲整數且 $1\le a<10$，試問 a 的整數部分爲 __7__，n 值爲 __23__．

解： $\log 2^{50}=50\times\log 2=50\times 0.3010=15+0.0500$，

由 $\log 2^{50}$ 的首數爲 15，尾數爲 0.0500，

知 2^{50} 是 16 位數，最高位數字是 1，

$\log 3^{50}=50\times\log 3\approx 50\times 0.4771=23+0.8550$，

由 $\log 3^{50}$ 的首數爲 23，尾數爲 0.8550，

知 3^{50} 是 24 位數，最高位數字是 7，

得 $2^{50}+3^{50}$ 是 24 位數，最高位數字是 7．

4. 有一規則的數列：4，5，7，11，19，35，67，⋯，已知 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$，試求第 n 項 a_n．

解：$a_n=4+1+2+\cdots+2^{n-2}$（$n\ge 2$）$=4+2^{n-1}-1=3+2^{n-1}$．

5. 設 a_1，a_2，a_3，⋯，a_{10} 是一等比數列，其首項 $a_1>1$ 且公比 $r>1$．坐標平面上有一質點 M 自原點 $(0,0)$ 出發，依以下規則連續移動十次：第一次移動往右 $\log a_1$ 單位，第二次移動向上 $\log a_2$ 單位，第三次移動往右 $\log a_3$ 單位，第四次移動向上 $\log a_4$ 單位，依此類推直到第十次；即第 $2k-1$ 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位，接著第 $2k$ 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單位．已知經過這十次的移動後，該質點 M 停在點 $(5+5\log 2, 5+\dfrac{15}{2}\log 2)$ 的位置上，試問首項 a_1 與公比 r 組成的序對 (a_1,r) 爲以下哪一選項？【96 指考甲】

(1) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$　(2) $(2\sqrt{2},\sqrt{5})$　(3) $(2,\sqrt{2})$　(4) $(5,\sqrt{5})$　(5) $(5,\sqrt{2})$．

解：因 $\log a_k=\log(a_1\cdot r^{k-1})=\log a_1+(k-1)\log r$

$x=\log a_1+\log a_3+\log a_5+\log a_7+\log a_9$，

得 $5+5\log 2=5\log a_1+20\log r$ ⋯⋯①

$y=\log a_2+\log a_4+\log a_6+\log a_8+\log a_{10}$，

得 $5+\dfrac{15}{2}\log 2=5\log a_1+25\log r$ ⋯⋯②

由①，②得 $r=\sqrt{2}$，$a_1=5$，故選(5)．

情境模擬題（每題 5 分，共 40 分）

1. 小熹想把厚度爲 0.01 公分的一大張紙對折 30 次，假設小熹能辦到，試問折完的厚度最接近下列哪一個選項？

(1)1 公尺　(2)10 公尺　(3)1 公里　(4)10 公里　(5)100 公里．

解：厚度爲 0.01×2^{30}，由 $\log 2^{30}=30\cdot\log 2\approx 9$，知 $2^{30}\approx 10^9$．

得厚度爲 0.01×10^9 公分 $=10^7$ 公分 $=10^5$ 公尺 $=100$ 公里，故選(5)．

2. 在 1999 年 6 月 1 日數學家利用超級電腦驗證出 $2^{6972593}-1$ 是一個質數，若想要列印出此質數，至少需要多少張 A4 紙？假設每張 A4 紙可列印出 3000 個數字，在下列選項中，選出最接近的張數．（$\log_{10}2\approx 0.3010$）

(1)50　(2)100　(3)200　(4)500　(5)700．

解：$\log 2^{6972593} = 6972593 \cdot \log 2 \approx 2098750.493$，

知 $2^{6972593}$ 為 2098751 位數，由 $2098751 \div 3000 \approx 700$，故選(5)．

3. 天文學中是根據肉眼觀測星球的亮度來定義其星等；若織女星的亮度為 F_0，則一顆亮度為 F 的星星，其等第定為 $m = -2.5\log_{10}\dfrac{F}{F_0}$，稱為 m 等星，則 1 等星的亮度是 6 等星亮度的 ＿100＿ 倍．

解：由 1 等星：$1 = -2.5(\log_{10} F_1 - \log_{10} F_0)$，　6 等星：$6 = -2.5(\log_{10} F_6 - \log_{10} F_0)$，

相減得 $-5 = -2.5(\log_{10} F_1 - \log_{10} F_6)$，$2 = \log_{10}\dfrac{F_1}{F_6}$，得 $\dfrac{F_1}{F_6} = 100$，$F_1 = 100F_6$．

4. 目前國際使用芮氏規模來表示地震強度．設 $E(r)$ 為地震芮氏規模 r 時，震央所釋放出來的能量，r 與 $E(r)$ 的關係如下：$\log E(r) = 5.24 + 1.44r$，

(1)某次地震其芮氏規模為 4，試問震央所釋放的能量 $E(4)$ 為多少？＿10^{11}＿

(2)試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放能量之 ＿758＿ 倍（整數倍以下捨去，已知 $10^{1.44} \approx 27.54$）.【90 指考乙】

解：(1) $\log E(4) = 5.24 + 1.44 \times 4 = 11$，得 $E(4) = 10^{11}$．

(2) $\log E(6) = 5.24 + 1.44 \times 6 = 13.88$．

$$\log\frac{E(6)}{E(4)} = \log E(6) - \log E(4) = 2.88 \Rightarrow \frac{E(6)}{E(4)} = 10^{2.88} = (10^{1.44})^2 = (27.54)^2 \approx 758 .$$

5. 數學教科書所附的對數表中，$\log 4.34 = 0.6375$，$\log 4.35 = 0.6385$．根據 $\log 4.34$ 和 $\log 4.35$ 的查表值以內插法求 $\log 4.342$，設求得的值為 p，則下列哪一個選項是正確的？

(1) $p = \dfrac{1}{2}(0.6375 + 0.6385)$　(2) $p = 0.2 \times 0.6375 + 0.8 \times 0.6385$

(3) $p = 0.8 \times 0.6375 + 0.2 \times 0.6385$　(4) $p = 0.6375 + 0.002$

(5) $p = 0.6385 - 0.002$．　【98 指考甲】

解：由內插法：$\dfrac{p - 0.6375}{0.6385 - 0.6375} = \dfrac{4.342 - 4.34}{4.35 - 4.34} = 0.2$，

$p = 0.6375 + 0.2(0.6385 - 0.6375)$，

$p = 0.8 \times 0.6375 + 0.2 \times 0.6385$ 或 $p = 0.6375 + 0.0002$．　故選(3)．