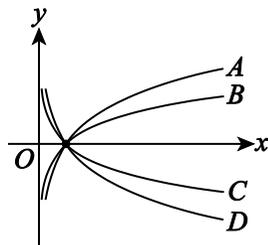


3-4 對數函數

實力養成

基礎題 (每題 5 分, 共 30 分)

1. 右圖為 $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_3 x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的部分圖形.



(1) 請判別 $y = \log_3 x$ 的圖形為 .

(2) 四數 $\log_2 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_3 2$, $\log_{\frac{1}{3}} 2$ 中, 最小的數為 .

解: (1) 因 $x > 1$ 時, $\log_2 x > \log_3 x > 0$, 知 $y = \log_3 x$ 的圖形為 B .

(2) 因 $x > 1$ 時, $\log_2 x > \log_3 x > 0 > \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{2}} x$, 知最小的數為 $\log_{\frac{1}{2}} 2$.

2. 對數函數 $g(x) = \log_{10} x$ 且 $a > 0$, $b > 0$, 下列何者正確?

(1) $g(ab) = g(a) + g(b)$

(2) $g(ab) = g(a) \cdot g(b)$

(3) $g(a+b) = g(a) + g(b)$

(4) $g(a+b) = g(a) \cdot g(b)$.

解: $g(ab) = \log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b = g(a) + g(b)$, $g(a+b) = \log_{10}(a+b)$,

知 $g(ab) = g(a) + g(b)$, 故選(1) .

3. 函數 $f(x) = a + \log_b x$ 圖形通過點(1,2), 其對稱於 $y = x$ 的函數 $y = h(x)$ 的圖形通過(4,16), 試問 a, b 的值 .

解: $y = f(x)$ 與 $y = h(x)$ 的圖形對稱於 $y = x$,

由 $y = f(x)$ 圖形過點(1,2)得 $2 = a + \log_b 1$, 知 $a = 2$,

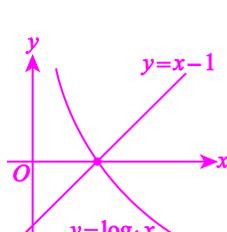
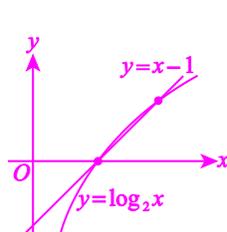
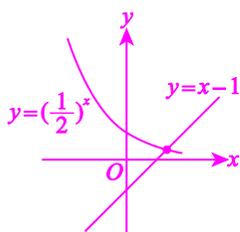
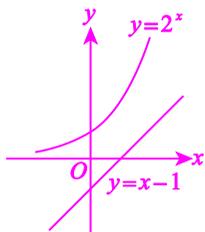
由 $y = h(x)$ 圖形過點(4,16), 表示 $y = f(x)$ 圖形過點(16,4),

得 $4 = a + \log_b 16 = 2 + \log_b 16$, 得 $\log_b 16 = 2$, 知 $b = 4$, 即 $a = 2, b = 4$.

4. 直線 $y = x - 1$ 與下列哪一個函數的圖形恰相交二點?

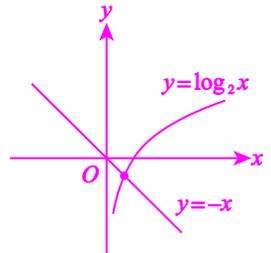
(1) $y = 2^x$ (2) $y = (\frac{1}{2})^x$ (3) $y = \log_2 x$ (4) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

解: 分別作 $y = x - 1$ 的圖形與各選項中的圖形,



得 $y = \log_2 x$ 與 $y = x - 1$ 恰相交二點，
故選(3)。

5. (1)試求 $y = \log_2 x$ 與 $y = -x$ 兩圖形交點的個數。
(2)試求方程式 $x + \log_2 x = 0$ 實數解的個數。



解：(1)作 $y = \log_2 x$ 與 $y = -x$ 的圖形，兩圖形有一個交點。
(2)交點的 x 坐標即方程式的解，知恰有一實數解。

6. 試求 $y = 2 \log_3 x$ 與 $y = \log_3(2x + 3)$ 兩圖形交點的坐標。

解：首先 $x > 0$ ， $2x + 3 > 0$ ，得 $x > 0$ ，
由 $2 \log_3 x = \log_3(2x + 3)$ ，即 $\log_3 x^2 = \log_3(2x + 3)$ ，
得 $x^2 = 2x + 3$ ，得 $(x + 1)(x - 3) = 0$ ，
但 $x > 0$ 得 $x = 3$ ，又 $y = 2 \log_3 3 = 2$ ，得交點的坐標 $(3, 2)$ 。

進階題 (每題 5 分, 共 30 分)

1. 解對數不等式：

(1) $\log_2(3x) > \log_2(x + 2)$. (2) $\log_2(x - 2) + \log_2(x - 3) < 1$.

解：(1) $3x > x + 2 > 0$ ，得 $x > 1$.
(2) 首先 $x - 2 > 0$ ， $x - 3 > 0$ ，即 $x > 3$ ，
又 $\log_2[(x - 2)(x - 3)] < \log_2 2$ ，
得 $(x - 2)(x - 3) < 2$ ，整理得 $(x - 1)(x - 4) < 0$ ，但 $x > 3$ ，知 $3 < x < 4$.

2. 在坐標平面上，將 $y = \log_4 x$ 的圖形沿 x 軸方向右移 3 單位得到第二個圖形，
今有一直線 $x = k$ 與此二圖形分別交於 A, B 兩點，且 $\overline{AB} = 1$ ，試問 k 值。

解： $y = \log_4 x$ 的圖形沿 x 軸方向右移 3 單位，
得 $y = \log_4(x - 3)$ ，依題意知 $\log_4 k - \log_4(k - 3) = 1$ ， $k > 3$ ，
即 $\log_4 \frac{k}{k - 3} = \log_4 4$ ， $\frac{k}{k - 3} = 4$ ，得 $k = 4$.

3. 若 $y = 2^x$ 與 $y = 2 - x$ 相交於點 $A(\alpha, 2 - \alpha)$ ， $y = \log_2 x$ 與 $y = 2 - x$ 相交於點 $B(\beta, 2 - \beta)$ ，試求 $\alpha + \beta$ 的值？

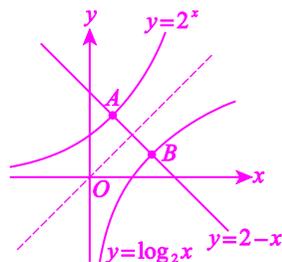
解：因 $y = 2^x$ 與 $y = \log_2 x$ 的圖形對稱於 $y = x$ ，

知 A 與 B 的中點為 $M(1,1)$ ， $\frac{\alpha + \beta}{2} = 1$ ，得 $\alpha + \beta = 2$ 。

4. 試解不等式 $2\log_3(x-4) < \log_3(x-2)$ 。

解： $\log_3(x-4)^2 < \log_3(x-2)$ ，

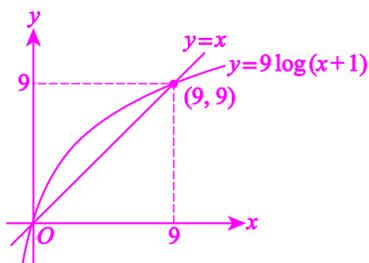
$$\text{得} \begin{cases} x-4 > 0 \\ x-2 > 0 \\ (x-4)^2 < x-2 \end{cases}, \begin{cases} x > 4 \\ x > 2 \\ 3 < x < 6 \end{cases}, \text{知 } 4 < x < 6.$$



5. 已知 $f(x) = 9\log(x+1)$ 與 $y = x$ 的圖形相交於原點與 $(9,9)$ ，試觀察 $y = f(x)$ 與 $y = x$ 的函數圖形，並判斷下列選項何者正確？

(1) $f(-0.5) > -0.5$ (2) $f(7.2) > 7.2$ (3) $f(10) > 10$

解：



知(1) $f(-0.5) < -0.5$ ，(2) $f(7.2) > 7.2$ ，(3) $f(10) < 10$ ，故選(2)。

6. 設 a 為大於 1 的實數，函數 $f(x) = a^x$ ， $g(x) = \log_a x$ ，若直線 $y = 5x$ 與 $y = f(x)$ 的圖形有兩個交點，試問直線 $y = \frac{1}{5}x$ 與 $y = g(x)$ 兩圖形交點個數。

解： $y = 5x$ 與 $y = \frac{1}{5}x$ 對稱於直線 $y = x$ ，

$y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 也對稱於直線 $y = x$ ，

知 $y = \frac{1}{5}x$ 與 $y = g(x)$ 兩圖形也是有兩個交點。

情境模擬題 (每題 8 分, 共 40 分)

1. 將 1 萬元存入某銀行, 已知定存的年利率為 2%, 每半年複利一次, 試問需多少年後, 本利和才能超過 2 萬元. ($\log 1.01 \approx 0.0043$)

解: 定存的年利率為 2%, 存款 n 年,

因每半年複利一次, 得每期的利率為 1%, 期數為 $2n$,

得 $10000 \times (1+1\%)^{2n} \geq 20000$, 即 $(1.01)^{2n} \geq 2$,

由 $\log(1.01)^{2n} \geq \log 2$, $2n \cdot 0.0043 \geq 0.3010$, $n \geq \frac{0.3010}{0.0086} \approx 35$ (年).

2. 某行政院長提出知識經濟, 喊出 10 年內要讓臺灣 double (加倍), 一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍, 如果每年調薪 $a\%$, 其中 a 為整數, 欲達成小市民的希望, 那麼 a 的最小值為 8. (參考數值: $\log 2 \approx 0.3010$)

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log(1+0.01x) \approx$	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

解: 設原薪資為 A , 滿足

$$A(1+a\%)^{10} \geq 2A \Rightarrow (1+a\%)^{10} \geq 2 \Rightarrow 10\log(1+a\%) \geq \log 2 \Rightarrow \log(1+a\%) \geq 0.03010,$$

由附表知 $\log 1.07 \approx 0.0294$, $\log 1.08 \approx 0.0334$, 知 a 的最小整數值為 8.

3. 某甲在股票市場買進賣出頻繁, 假設每星期結算都損失該星期初資金的 1%, 而第 n 星期結束後, 資金總損失已超過原始資金的一半, 則 n 的最小值為 69. (已知 $\log 9.9 \approx 0.9956$)

解: 設原始資金為 P , n 個星期後資金為 A ,

$$\text{則 } A = P(1-0.01)^n, \frac{A}{P} = (0.99)^n < \frac{1}{2}, n \log 0.99 < \log 0.5$$

$$\Rightarrow n > \frac{-\log 2}{(\log 9.9) - 1} \approx 68.41, \text{ 得 } n \geq 69.$$

4. 統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現: 我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比. 例如: 大圖形是小圖形的 3 倍, 眼睛感覺到的只有 $3^{0.7}$ (約 2.16) 倍. 觀察某個國家地圖, 感覺全國面積約為某縣面積的 10 倍, 試問這國家的實際面積大約是該縣面積的幾倍?
(已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$)

(1)18 倍 (2)21 倍 (3)24 倍 (4)27 倍 (5)36 倍.

【93 指考乙】

解：設實際面積為 k 倍，由題意知 $k^{0.7} = 10$.因 $\log k^{0.7} = \log 10$ ，得 $0.7 \log k = 1$ ， $\log k = 1.4286 \approx 0.4771 \times 3 = 3 \log 3 = \log 27$ ，得 $k \approx 27$ ，故選(4) .

5. 有研究機構想將世界各國依照其面積大小為等級的標準，右表所列的 6 個國家的面積（單位：千平方公里）. 且以冰島為基準，用對數函數 $f(x)$ 來計算各國的面積等級

$$f(A) = 5 \log\left(\frac{A}{A_0}\right),$$

其中 A_0 是冰島面積， A 是該國面積 .試問面積等級大於 10 的國家有 1 個 .

國家	面積
冰島	103
德國	357
埃及	1001
澳洲	7687
美國	9827
俄羅斯	17075

解：設等級為 10 的國家，其面積 A ，

$$10 = 5 \log\left(\frac{A}{103}\right),$$

得 $\frac{A}{103} = 10^2$ ，知 $A = 10300$ ，因面積大於 10300 的國家只有俄羅斯 .