3-3　對數

實力養成

基礎題（每題 5 分,共 30 分）

1. 試求下列各式的值：

(1) $\log_{10}4-\log_{10}5+2\log_{10}\sqrt{125}$ ．

(2) $\dfrac{1}{3}\log 3-\log\sqrt[3]{15}+\log\sqrt[3]{50}$ ．

解：(1)原式 $=\log_{10}4-\log_{10}5+\log_{10}125=\log_{10}(4\times\dfrac{1}{5}\times 125)=\log_{10}100=2$ ．

(2)原式 $=\dfrac{1}{3}(\log 3-\log 15+\log 50)=\dfrac{1}{3}\log(3\times\dfrac{1}{15}\times 50)=\dfrac{1}{3}\log_{10}10=\dfrac{1}{3}$ ．

2. 試求下列各式的值：

(1) $(\log_2 27)(\log_9 32)$ ．

(2) $\log_4(\log_2 9)+\log_4(\log_3 4)$ ．

解：(1)原式 $=\dfrac{\log 27}{\log 2}\cdot\dfrac{\log 32}{\log 9}=\dfrac{3\log 3}{\log 2}\cdot\dfrac{5\log 2}{2\log 3}=\dfrac{15}{2}$ ．

(2)原式 $=\log_4\left[(\log_2 9)\cdot(\log_3 4)\right]$，

而 $\log_2 9\cdot\log_3 4=\dfrac{2\log 3}{\log 2}\cdot\dfrac{2\log 2}{\log 3}=4$，原式 $=\log_4 4=1$ ．

3. 試求 $4^{-2\log_4 2}+9^{\log_3\frac{1}{2}}-5^{\log_{25}\frac{1}{4}}$ 的值．

解：原式 $=4^{\log_4\frac{1}{4}}+9^{\log_3\frac{1}{2}}-5^{\log_{25}\frac{1}{4}}=(\dfrac{1}{4})^{\log_4 4}+(\dfrac{1}{2})^{\log_3 9}-(\dfrac{1}{4})^{\log_{25}5}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=0$ ．

4. 設 $2^a=7$，$\log_7 3=b$，試以 a，b 表示 $\log_{98}63$ ．

解：由 $2^a=7$ 得 $\log_2 7=a$，

又 $\log_7 3=b$ 得 $\log_2 3=ab$，

$\log_{98}63=\dfrac{\log_2 63}{\log_2 98}=\dfrac{\log_2(3^2\times 7)}{\log_2(2\times 7^2)}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 7}{1+2\log_2 7}=\dfrac{2ab+a}{1+2a}$ ．

5. 已知 a，b，c 均爲正整數，且

$a\log_{270}2+b\log_{270}3+c\log_{270}5=2$，試求 a 值．

解：$\log_{270}2^a+\log_{270}3^b+\log_{270}5^c=2$.

$\log_{270}(2^a\cdot3^b\cdot5^c)=\log_{270}270^2$.

$2^a\cdot3^b\cdot5^c=(2\cdot3^2\cdot5)^2=2^2\cdot3^4\cdot5^2$，得 $a=2$.

6. 設 a，b 為正實數，已知 $\log_7 a=11$， $\log_7 b=13$，則 $\log_7(a+b)$ 的值最接近下列哪個選項？(1)12　(2)13　(3)14　(4)23　(5)24 .

解：$\log_7 a=11$，得 $a=7^{11}$， $\log_7 b=13$，得 $b=7^{13}$，

又 $a+b=7^{11}+7^{13}=7^{11}(1+49)=7^{11}\cdot50\approx7^{13}$，

得 $\log_7(a+b)\approx\log_7 7^{13}=13$，故選(2) .

進階題（每題 5 分,共 30 分）

1. 已知 $\log2\approx0.3010$， $\log3\approx0.4771$，則下列何者為正數？

(1) $\log_2 3-1$　(2) $\log_3 2-1$　(3) $\log_{\frac{1}{2}}3$　(4) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$.

解：因 $\log_2 3=\dfrac{\log3}{\log2}\approx1.59$， $\log_3 2=\dfrac{\log2}{\log3}\approx0.63$，

(1) $\log_2 3-1\approx0.59>0$.

(2) $\log_3 2-1\approx-0.37<0$.

(3) $\log_{\frac{1}{2}}3=-\log_2 3\approx-1.59<0$.

(4) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}=\log_3 2\approx0.63>0$. 故選(1)(4) .

2. 在坐標平面上，設 P 為 $y=-(x+1)(x-2)$ 圖形上的一點，若 P 的 x 坐標為 $\log_3 10$，試問 P 的位置在哪一象限？(1)一　(2)二　(3)三　(4)四　(5)不一定 .

解：因點 P 的 x 坐標為 $\log_3 10>2$，

且 y 坐標為 $y=-(\log_3 10+1)(\log_3 10-2)<0$，

知點 P 在第四象限，故選(4) .

3. 設 $\log_a\alpha=\log_b\beta=\log_{\sqrt{ab}}10$， 已知 $\alpha\neq\beta$， 試問 $\alpha\beta$ 的值 .

解：設 $\log_a\alpha=\log_b\beta=\log_{\sqrt{ab}}10=k$，

$\alpha=a^k$， $\beta=b^k$， $10=(\sqrt{ab})^k=(ab)^{\frac{k}{2}}$，

得 $\alpha\beta=a^kb^k=(ab)^k=[(ab)^{\frac{k}{2}}]^2=10^2=100$.

4. 設 a，b 為大於 1 的實數，若 $(\log_a 2+\log_b 2)=4\log_{ab} 2$，試求 $\log_a b$ 的值．

解：$\dfrac{\log 2}{\log a}+\dfrac{\log 2}{\log b}=4\cdot\dfrac{\log 2}{\log ab}=4\cdot\dfrac{\log 2}{\log a+\log b}$，

$\dfrac{\log b+\log a}{(\log a)(\log b)}=\dfrac{4}{\log a+\log b}$，

整理得 $(\log a-\log b)^2=0$，由 $\log a=\log b$ 得 $\log_a b=1$．

5. 下表是函數 $f(x)=b+\log_a x$ 的四個函數值：

x	0.25	2	4	8
$f(x)$	n	m	$10-n$	$m+4$

試求 a，b 的值．

解：依序代入得 $\begin{cases} n=b+\log_a \dfrac{1}{4} \cdots(1) \\ 10-n=b+\log_a 4 \cdots(3) \end{cases}$　$\begin{cases} m=b+\log_a 2 \cdots(2) \\ m+4=b+\log_a 8 \cdots(4) \end{cases}$

$\begin{cases} n=b-2\log_a 2 \\ 10-n=b+2\log_a 2 \end{cases}$，$\begin{cases} m=b+\log_a 2 \\ m+4=b+3\log_a 2 \end{cases}$，得 $b=5$，$a=\sqrt{2}$．

6. 解對數方程式：

(1) $\log_2(3x)=\log_2(x+2)$．

(2) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$．

解：(1) $\log_2(3x)=\log_2(x+2)$，即 $3x=x+2>0$，得 $x=1$．

(2)首先 $x-2>0$，$x-3>0$，即 $x>3$，

又 $\log_2[(x-2)(x-3)]=\log_2 2$，

得 $(x-2)(x-3)=2$，整理得 $(x-1)(x-4)=0$，但 $x>3$，故 $x=4$．

情境模擬題（**每題** 8 **分，共** 40 **分**）

1. <u>小康</u>想使用三個 2 與數學符號來表示一實數，試問 $\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ 所表示的實數．

解：因 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=[(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{8}}$，所求實數為 $\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}}=\log_2\dfrac{1}{8}=-3$．

2. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（W/m^2）來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-12}$（W/m^2）；當測得的聲音強度為 I（W/m^2）時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I)=10\cdot\log\dfrac{I}{I_0}$．

(1)一蚊子振動翅膀測得的聲音強度爲10^{-12}（$\mathrm{W/m^2}$），求其產生的噪音分貝數．
(2)汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度爲10^{-4}（$\mathrm{W/m^2}$），試問此聲音強度產生的噪音爲多少分貝？
(3)棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測的噪音爲 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約爲多少分貝？【93 指考乙】

解：由題意得

(1) $d(I_1)=10\cdot\log\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}=10\cdot\log 1=0$（分貝）.

(2) $d(I_2)=10\cdot\log\dfrac{10^{-4}}{10^{-12}}=10\log 10^{8}=80$（分貝）.

(3) $70=10\cdot\log\dfrac{I}{10^{-12}}$，得 $I=10^{-5}$ ．$100I=10^{-3}$，

則$10\log\dfrac{10^{-3}}{10^{-12}}=10\cdot\log 10^{9}=90$（分貝）.

3. 班佛法則：銀行存款首位數字爲 a 的比例約有 $\log(1+\dfrac{1}{a})$，例如存款金額爲 43210 元的首位數字爲 4，所有首位數字爲 4 的存款所占比例約 $\log(1+\dfrac{1}{4})$，請根據班佛法則，估計銀行存款的首位數字爲 3 或 4 或 5 的人約有多少比例？
(1)20%　(2)30%　(3)40%　(4)50%　(5)60%．

解：首位數字爲 3，4，5 所占比例分別爲 $\log(1+\dfrac{1}{3})$，$\log(1+\dfrac{1}{4})$，$\log(1+\dfrac{1}{5})$，

所占比例和爲 $\log\dfrac{4}{3}+\log\dfrac{5}{4}+\log\dfrac{6}{5}=\log(\dfrac{4}{3}\times\dfrac{5}{4}\times\dfrac{6}{5})=\log 2\approx 0.3010\approx 30\%$，故選(2).

4. 根據統計資料，在 A 鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的$100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數．今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息．又設最快要 T 小時後，有 99%的人口聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？【92 學測】
(1)5 小時　(2)$7\dfrac{1}{2}$小時　(3)9 小時　(4)$11\dfrac{1}{2}$小時　(5)13 小時．

解：$\begin{cases}100(1-2^{-3k})=70\\100(1-2^{-Tk})=99\end{cases}$，得$\begin{cases}2^{-3k}=0.3\\2^{-Tk}=0.01\end{cases}$，即$\begin{cases}-3k=\log_2 0.3\\-Tk=\log_2 0.01\end{cases}$，

相除 $\dfrac{T}{3}=\dfrac{\log_2 0.01}{\log_2 0.3}=\dfrac{\log 0.01}{\log 0.3}\approx 3.82$，知 $T\approx 11.5$，故選(4)．

5. 經由觀測與計算得知，某行星繞著一固定的恆星運動的主週期 T，與運行的軌跡半徑 R，會滿足克卜勒行星運動第三定律，即滿足下列的數學關係式：$R=8\cdot T^{\frac{3}{2}}$，若已知 $\log_2 R=X$， $\log_2 T=Y$，試問 $X=6$ 時，$Y=$ ___2___ ．

解：由 $\log_2 R=X$， $R=2^X$，知 $X=6$ 時， $R=64$，

$R=8\cdot T^{\frac{3}{2}}$，知 $R=64$ 時， $64=8\cdot T^{\frac{3}{2}}$，得 $T=4$，

$Y=\log_2 T$，知 $Y=\log_2 4=2$ ．