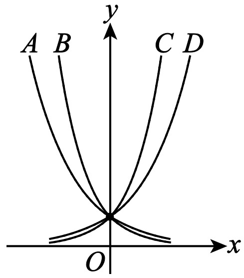
3-2　指數函數

基礎題（每題 5 分,共 30 分）

1. 已知右圖為 $y=2^x$，$y=2^{-x}$，$y=3^x$ 與 $y=3^{-x}$ 的部分圖形．



(1)請判別 $y=3^x$ 的圖形為 ___C___．

(2)四數 $2^{0.7}$，$2^{-0.7}$，$3^{0.7}$，$3^{-0.7}$ 中，最小的數為 ___$3^{-0.7}$___．

解：(1)因 $x>0$ 時，$3^x>2^x>1$，

知 $y=3^x$ 的圖形為 C．

(2)因 $x>0$ 時，$3^x>2^x>1>2^{-x}>3^{-x}$，　知最小的數為 $3^{-0.7}$．

2. 指數函數 $f(x)=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，下列何者正確？

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$　(2) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

(3) $f(xy)=f(x)+f(y)$　(4) $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$．

解：$f(x+y)=a^{x+y}=a^x\cdot a^y=f(x)f(y)$，

$f(xy)=(a^x)^y$，

知 $f(x+y)=f(x)f(y)$，　故選(2)．

3. 對任意實數 x 而言，試求 $27^{(x^2+\frac{2}{3})}$ 的最小值．

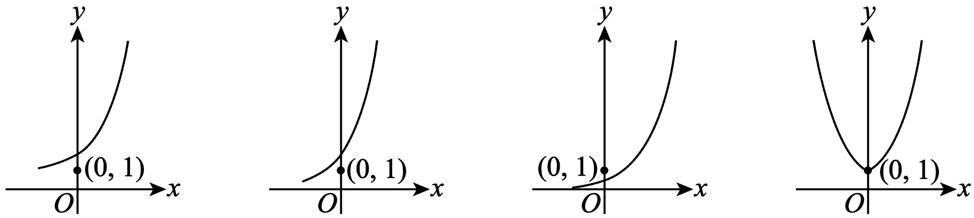
解：因 $x^2+\dfrac{2}{3}\geq\dfrac{2}{3}$，

由指數函數圖形知：$27^{x^2+\frac{2}{3}}\geq 27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$，

知最小值為 9．

4. 請判別下列各函數所對應的圖形：

(A)　　(B)　　(C)　　(D)



(1) $y=2^x+1$　(2) $y=2^{x-1}$　(3) $y=2\cdot 2^x$　(4) $y=2^{|x|}$ ．

解：(1) (A)．　(2) (C)．　(3) (B)．　(4) (D)．

5. (1)試求 $y=2^x$ 與 $y=-x$ 兩圖形交點的個數．

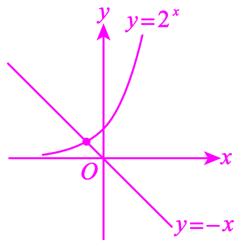
(2)試求方程式 $2^x+x=0$ 實數解的個數．

解：(1)作 $y=2^x$ 與 $y=-x$ 的圖形，

兩圖形有一個交點．

(2)交點的 x 坐標，即方程式的解，

知恰有一實數解．



6. 試求 $y=4^x+2$ 與 $y=3\cdot 2^x$ 兩圖形交點的坐標．

解：解方程式 $4^x+2=3\cdot 2^x$，

即 $(2^x-1)(2^x-2)=0$，

得 $x=0$ 或 $x=1$，

故所求交點爲 $(0,3)$ 與 $(1,6)$ ．

進階題（每題 5 分,共 30 分）

1. 解下列不等式：

(1) $4^x-3\cdot 2^{x-1}-1>0$ ．　(2) $2^{x+1}+2^{2-x}-6<0$ ．

解：(1) $(2^x)^2-3\cdot 2^x\cdot\dfrac{1}{2}-1>0$，令 $t=2^x>0$，

整理得 $2t^2-3t-2>0$，$(2t+1)(t-2)>0$，得 $t>2$，即 $2^x>2$，知 $x>1$ ．

(2) $2\cdot 2^x+4\cdot 2^{-x}-6<0$，令 $t=2^x>0$，

整理得 $t^2-3t+2<0$，$(t-1)(t-2)<0$，

得 $1<t<2$，即 $1<2^x<2$，知 $0<x<1$ ．

2. 設 $f(x)=4^x-2^{x+1}-1$ 且 $-1\le x\le 1$，若 $f(x)$ 的最小值為 $f(a)$，試求 a 及 $f(a)$ 的值．

解：$f(x)=(2^x)^2-2\cdot 2^x-1$，令 $t=2^x$，

整理得 $f(x)=t^2-2t-1$ 且 $\frac{1}{2}\le t\le 2$，即 $f(x)=(t-1)^2-2$ 且 $\frac{1}{2}\le t\le 2$，

知 $t=1$ 時 $f(x)$ 有最小值 -2，即 $2^x=1$，在 $a=0$ 時有最小值 $f(a)=-2$．

3. 設 $f(x)=4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+3$，其中 x 為實數，則

(1)若 $t=2^x+2^{-x}$，請用 t 表示 $f(x)$．

(2)試求 $f(x)$ 的最小值．

解：因 $t=2^x+2^{-x}$ 時，$t\ge 2$ 且 $t^2=4^x+2+4^{-x}$．

(1) $f(x)=(t^2-2)-2\cdot t+3$，$f(x)=t^2-2t+1$．

(2) $f(x)=(t-1)^2$ 且 $t\ge 2$，知 $t=2$ 時，$f(x)$ 有最小值 1．

4. 解不等式 $(\frac{5}{4})^x+(\frac{4}{5})^x<\frac{41}{20}$．

解：令 $t=(\frac{5}{4})^x$，化為 t 的不等式 $t+\frac{1}{t}<\frac{41}{20}$，

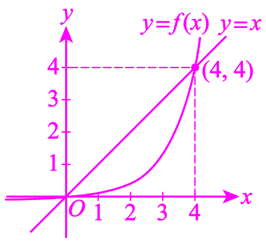
因 $t>0$ 得 $20t^2-41t+20<0$，即 $(5t-4)(4t-5)<0$，

得 $\frac{4}{5}<t<\frac{5}{4}$，即 $\frac{4}{5}<(\frac{5}{4})^x<\frac{5}{4}$，知 $-1<x<1$．

5. 已知 $f(x)=\frac{1}{20}(3^x-1)$ 與 $y=x$ 的圖形交於原點與 $(4,4)$，試觀察 $y=f(x)$ 與 $y=x$ 的函數圖形，並判斷下列選項何者正確？

(1) $f(-0.7)<-0.7$　(2) $f(3.1)<3.1$　(3) $f(4.1)<4.1$．

解：



知 $f(-0.7)>-0.7$，$f(3.1)<3.1$，$f(4.1)>4.1$，故選(2)．

6. 已知 $f(x)=2^x+2^{-x}$ 與 $g(x)=ax^2$ 兩圖形都對稱於 y 軸，且兩圖形相交於相異兩點 A，B 時，$\overline{AB}=6$，試求 a 值．

解：因 $f(x)=2^x+2^{-x}$ 與 $g(x)=ax^2$ 兩圖形都對稱於 y 軸，

設 $A(\alpha,t)$，$B(-\alpha,t)$，則知 $\overline{AB}=2\alpha=6$，$\alpha=3$，

由 $f(3)=\dfrac{65}{8}$，$g(3)=9a$，　知 $t=\dfrac{65}{8}=9a$，得 $a=\dfrac{65}{72}$．

情境模擬題（每題 8 分,共 40 分）

1. 假設在實驗室中有一群果蠅，其數量爲依指數成長的函數：

$$f(t)=r\cdot 5^{kt}，t \text{ 表時間的天數，} r，k \text{ 爲常數．}$$

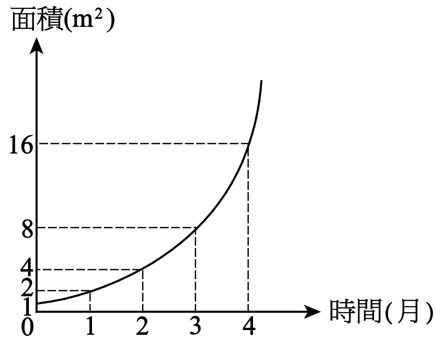
已知在第 2 天之後有 150 隻，在第 4 天之後有 450 隻．試問在開始實驗時有幾隻果蠅？

解：$f(2)=r\cdot 5^{2k}=150$，$f(4)=r\cdot 5^{4k}=450$，

$\dfrac{f(4)}{f(2)}=5^{2k}=3$，得 $r=50$，$5^k=3^{\frac{1}{2}}$，

知 $f(t)=50\cdot 3^{\frac{t}{2}}$，得 $f(0)=50$（隻）.

2. 右圖爲某池塘中布袋蓮蔓延的面積與時間關係圖．假設其關係爲指數函數，試問下列敘述何者爲真？



(1)此指數函數的底數爲 2．

(2)在第 5 個月時，布袋蓮的面積就會超過 30m^2．

(3)布袋蓮從 4m^2 蔓延到 12m^2，只需要 1.5 個月．

(4)設布袋蓮蔓延到 2m^2，3m^2，6m^2 所需的時間分別爲 t_1，t_2，t_3，則 $t_1+t_2=t_3$．

(5)布袋蓮在第 1 到第 3 個月之間的蔓延平均速度等於在第 2 到第 4 個月之間的蔓延平均速度．

解：指數函數爲 $f(x)=2^x$，$x\geq 0$．

(1)指數函數的底數爲 2．

(2) $f(5)=2^5=32>30$．

(3) $f(2)=2^2=4$，$f(3.5)=2^{3.5}=8\sqrt{2}<12$．

(4) $f(t_1)=2$，$f(t_2)=3$，$f(t_3)=6$，得 $2^{t_1}=2$，$2^{t_2}=3$，$2^{t_3}=6$，

$2^{t_1+t_2}=2\times 3=6=2^{t_3}$，得 $t_1+t_2=t_3$.

(5)由 $\dfrac{f(3)-f(1)}{2}=\dfrac{8-2}{2}=3$， $\dfrac{f(4)-f(2)}{2}=\dfrac{16-4}{2}=6$，

知道蔓延平均速度不同． 故選(1)(2)(4)．

3. 地震規模的大小通常用芮氏等級來表示．已知芮氏等級每增加 1 級，地震震幅強度約增加為原來的 10 倍，能量釋放強度則約增加為原來的 32 倍．現假設有兩次地震，所釋放的能量約相差 100000 倍，依上述性質則地震震幅強度約相差幾倍？請選出最接近的答案．

(1)10 倍　(2)100 倍　(3)1000 倍　(4)10000 倍．

解：等級增加 1 級，震幅增為 10 倍，能量增為 32 倍；

等級增加 2 級，震幅增為 10^2 倍，能量增為 32^2 倍；

因 $32^n=100000\Rightarrow 2^{5n}=10^5\Rightarrow 2^n=10$， $n\approx 3$ 得地震震幅約增為 10^3 倍．

4. 牛頓冷卻定律是描述一個物體在常溫環境下溫度的變化，物體的原始溫度為 θ_1，而經 t 分鐘冷卻後溫度為 θ，滿足：$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$，其中 θ_0 表物體周圍的溫度，常數 k 是物質的特性．今有一杯熱茶用 95℃的開水沖泡，放置在 31℃的環境中，測得 5 分鐘後，熱茶的溫度為 63℃，試問再經過 30 分鐘後，熱茶的溫度最接近

(1)32℃　(2)35℃　(3)38℃　(4)41℃　(5)44℃．

解：由 $63=31+(95-31)\cdot e^{-5k}$， 得 $e^{-5k}=\dfrac{1}{2}$，

知 $\theta=31+(63-31)\cdot e^{-30k}$，

因 $e^{-30k}=(e^{-5k})^6=(\dfrac{1}{2})^6=\dfrac{1}{64}$，得 $\theta=31+(63-31)\cdot\dfrac{1}{64}=31.5$，知 $\theta=31.5$℃ ．

5. 數學教科書所描繪以 2 為底的指數函數 $y=2^x$ 的圖形中，請善用圖形曲線凹口向上的特性，已知 $\pi\approx 3.14$，設 $a=2^{\pi}$，$b=2^{\pi+1}$，$c=2^{\pi+2}$．試判別 $a+c$ 與 $2b$ 的大小．

解：因 $y=2^x$ 圖形曲線凹口向上， 知 $\dfrac{a+c}{2}>b$，得 $a+c>2b$ ．