實力養成

基礎題（每題 5 分,共 30 分）

1. 試求下列各式的值：

(1) $(\frac{27}{125})^{-\frac{1}{3}}\cdot(\frac{9}{25})^{\frac{1}{2}}$.　(2) $(\frac{81}{16})^{0.25}\cdot(\frac{27}{8})^{-\frac{2}{3}}\cdot(0.027)^{\frac{1}{3}}$.

解：(1)原式 $=[(\frac{3}{5})^3]^{-\frac{1}{3}}\cdot[(\frac{3}{5})^2]^{\frac{1}{2}}=(\frac{3}{5})^{-1}\cdot(\frac{3}{5})^1=(\frac{3}{5})^0=1$.

(2)原式 $=[(\frac{3}{2})^4]^{\frac{1}{4}}\cdot[(\frac{3}{2})^3]^{-\frac{2}{3}}\cdot[(\frac{3}{10})^3]^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\cdot(\frac{3}{2})^{-2}\cdot(\frac{3}{10})^1=(\frac{3}{2})^{-1}\cdot\frac{3}{10}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{5}$.

2. 試化簡下列各式的值（ $a>0$ ）：

(1) $\frac{(a^2\cdot a^{-4})^{-2}}{\sqrt{a^3}\sqrt{a^{-1}}}$.　(2) $\sqrt[5]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$.

解：(1)原式 $=\frac{(a^{-2})^{-2}}{a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}=\frac{a^4}{a^1}=a^3$.

(2)原式 $=(a\cdot a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{5}}\cdot(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a$.

3. 試求下列各式的值：

(1) $(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}\cdot(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}$.　(2) $(3-\sqrt{2})(11+6\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$.

解：(1)原式 $=[(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})]^{\frac{1}{5}}=1^{\frac{1}{5}}=1$.

(2)因 $3-\sqrt{2}=[(3-\sqrt{2})^2]^{\frac{1}{2}}=(11-6\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$,原式 $=(11-6\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\cdot(11+6\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=49^{\frac{1}{2}}=7$.

4. 設 $A=15^{20}$， $B=6^{30}$， $C=4^{40}$， $D=3^{50}$，試比較 A，B，C，D 的大小．

解： $A=(15^2)^{10}=225^{10}$，

$B=(6^3)^{10}=216^{10}$，

$C=(4^4)^{10}=256^{10}$，

$D=(3^5)^{10}=243^{10}$，

由 $216<225<243<256$ 知 $B<A<D<C$ ．

5. 設 $P=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$， $Q=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$， $R=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$，試比較 P，Q，R 的大小．

解： $P=[(\frac{1}{2})^3]^{\frac{1}{6}}=(\frac{1}{8})^{\frac{1}{6}}$，

$Q=[(\frac{1}{3})^2]^{\frac{1}{6}}=(\frac{1}{9})^{\frac{1}{6}}$，

$R=[(\frac{1}{2})^2]^{\frac{1}{4}}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=(\frac{1}{8})^{\frac{1}{6}}$，

由 $\frac{1}{9}<\frac{1}{8}$，知 $Q<P=R$ ．

6. 解方程式： $2^{2x+1}+2^{3x}=5\cdot 2^{x+4}$ ．

解： $2\cdot 2^{2x}+2^{3x}=80\cdot 2^{x}$，

令 $t=2^x$，得 $t^3+2t^2-80t=0$， $t(t-8)(t+10)=0$，

因 $t=2^x>0$，得 $t=8$，即 $2^x=2^3$，知 $x=3$ ．

進階題（每題 5 分,共 30 分）

1. 設 $a^{2x}=3$，試求下列各式的值：

(1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$ ．　(2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-x}}{a^{x}+a^{-3x}}$ ．

解：分子與分母同乘以 a^{x}，

(1)原式 $=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\dfrac{9+\frac{1}{3}}{3+1}=\dfrac{7}{3}$ ．

(2)原式 $=\dfrac{a^{4x}+1}{a^{2x}+a^{-2x}}=\dfrac{9+1}{3+\frac{1}{3}}=3$ ．

2. 設聯立方程組：$\begin{cases}2^{x}+3^{y}=17\\2^{x+2}-3^{y+1}=5\end{cases}$，試求 x，y 的值．

解：$2^{x+2}=4\cdot2^{x}$，$3^{y+1}=3\cdot3^{y}$，$\begin{cases}2^{x}+3^{y}=17\\4\cdot2^{x}-3\cdot3^{y}=5\end{cases}$，

得 $2^{x}=8$，$3^{y}=9$，知 $x=3$，$y=2$ ．

3. 設 $f(x)=\dfrac{(2^{x}-128)(3^{x}-1)}{(5^{x}-125)(2^{-x}-4)}$，試判別下列各值的正負：

(1) $f(2)$ ．　(2) $f(\sqrt{10})$ ．

解：(1) $f(2)=\dfrac{(4-128)(9-1)}{(25-125)(\frac{1}{4}-4)}<0$ ．

(2) $2^{\sqrt{10}}<2^{6}=128\Rightarrow2^{\sqrt{10}}-128<0, 3^{\sqrt{10}}>3^{0}=1\Rightarrow3^{\sqrt{10}}-1>0$

$5^{\sqrt{10}}>5^{3}=125\Rightarrow5^{\sqrt{10}}-125>0$,　$2^{-\sqrt{10}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt{10}}}<1\Rightarrow2^{-\sqrt{10}}-4<0$

$f(\sqrt{10})=\dfrac{(2^{\sqrt{10}}-128)(3^{\sqrt{10}}-1)}{(5^{\sqrt{10}}-125)(2^{-\sqrt{10}}-4)}>0$ ．

4. (1)試比較 $15\cdot 3^{15}$，$16\cdot 3^{16}$ 與 3^{18} 的大小．

(2)設 x 為一正實數且滿足 $x\cdot 3^{x}=3^{18}$，若 x 落在連續整數 k 與 $k+1$ 之間，則 $k=$ __15__ ．

解：(1) $15\cdot 3^{15}=5\cdot 3^{16}$， $3^{18}=9\cdot 3^{16}$，

$5\cdot 3^{16}<9\cdot 3^{16}<16\cdot 3^{16}$，得 $15\cdot 3^{15}<3^{18}<16\cdot 3^{16}$ ．

(2)因 $15\cdot 3^{15}<3^{18}<16\cdot 3^{16}$，知 $15<x<16$，得 $k=15$ ．

5. 設 $f(x)=3^{x}+3^{-x}$，且 α， β 是 $f(x)=5$ 的解，試求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$ ． (2) $3^{\alpha}+3^{\beta}$ ．

解：設 $t=3^{x}\Rightarrow f(x)=t+\dfrac{1}{t}$

$f(x)=5\Rightarrow t+\dfrac{1}{t}=5,\quad t^{2}-5t+1=0$

α， β 是 $3^{x}+3^{-x}=5$ 的二解 $\Rightarrow t^{2}-5t+1=0$ 的二解為 $3^{\alpha},3^{\beta}$

由根與係數的關係 $\Rightarrow\begin{cases}3^{\alpha}+3^{\beta}=5\\ 3^{\alpha}\cdot 3^{\beta}=1\Rightarrow 3^{\alpha+\beta}=1\end{cases}$

(1) $\alpha+\beta=0$ ．

(2) $3^{\alpha}+3^{\beta}=5$ ．

6. 設 $f(x)=\dfrac{9^{x}}{3+9^{x}}$，試求下列各式的值：

(1) $f(x)+f(1-x)$ ． (2) $f(\dfrac{1}{5})+f(\dfrac{4}{5})$ ．

解：(1) $f(1-x)=\dfrac{9^{1-x}}{3+9^{1-x}}=\dfrac{9}{3\cdot 9^{x}+9}=\dfrac{3}{9^{x}+3}$，

知 $f(x)+f(1-x)=\dfrac{9^{x}+3}{3+9^{x}}=1$ ．

(2)因 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}=1$， 知 $f(\dfrac{1}{5})+f(\dfrac{4}{5})=1$ ．

情境模擬題（每題 8 分,共 40 分）

1. 英文字母有 26 個字母，將“0”及 A，B，C，…，Z 依序組成 27 進位的數字系統，如此每個英文單字都可以轉換爲一個十進位的專屬密碼，例如：$A=1$，$ON=15\times27^1+14=419$．小熹今天接到同學的簡訊密碼邀她到“19374”玩，請問她們要去哪裡？
(1)KTV　(2)ZOO　(3)$PARK$．

解：因爲 $19374=26\times27^2+420$

$420=15\times27+15$

所以 $19374=26\times27^2+15\times27+15$，

而第 26 位，第 15 位，第 15 位的英文字母分別爲 Z，O，O，

知 19374 代表 ZOO（動物園）.

2. 小熹練習英文打字，經過 t 週的練習後，平均每分鐘可打 $144\times(1-2^{-0.3t})$ 個字．試問經過 10 週的練習後，小熹平均每分鐘可打 ___126___ 個字．

解：將 $t=10$ 代入函數中，得 $144\times(1-2^{-3})=144\times(1-\frac{1}{8})=126$（字）.

3. 服用藥物需依照醫師指示．若某藥品在服用後 t 小時，在胃內的藥量尚有 $f(t)=200\times(0.25)^t$ 公絲，則服藥後 1 小時 30 分時，此藥在胃內的殘存量爲 ___25___ 公絲．

解：$f(1.5)=200\times(0.25)^{1.5}$，而 $(0.25)^{1.5}=[(\frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$，

$f(1.5)=200\times\frac{1}{8}=25$（公絲）.

4. 某食品實驗室混合甲，乙兩種菌類製成一種新食品．調查後發現乙菌個數是甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎．又知道甲菌一日後增加一倍，乙菌增加三倍（成爲原來的四倍）．現在取同數量的甲，乙兩種菌，讓它們同時繁殖，試問至少第 __10__ 天後混合甲，乙兩種菌類才能製成受歡迎的食品．

解：設甲菌與乙菌開始均爲 A 個，則 n 天後，

甲菌的數量爲 $A(1+1)^n=A\cdot 2^n$，

乙菌的數量爲 $A(1+3)^n=A\cdot 4^n$，

乙菌總數大於甲菌總數 1000 倍以上時，$A\cdot 4^n>1000\cdot A\cdot 2^n$，得 $2^n>1000$，

知 $n\geq 10$．

5. 鋼琴的十二平均律理論：用第一條弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第二個音的弦長，將第二條弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第三個音的弦長，以下用相同的方法求得各個音的弦長，設第一個音的弦長爲 1，則第 m 個音的弦長爲 $\frac{1}{2}$ 時，m 值爲 __13__ ．

解：第 m 個音的弦長爲 ℓ_m 時，由 $\ell_1=1$

且 $\ell_2=\dfrac{\ell_1}{\sqrt[12]{2}}=\dfrac{\ell_1}{2^{\frac{1}{12}}}=\ell_1\cdot 2^{-\frac{1}{12}}=2^{-\frac{1}{12}}$，同理 $\ell_3=(2^{-\frac{1}{12}})^2$，…，

知 $\ell_m=(2^{-\frac{1}{12}})^{m-1}=2^{-\frac{m-1}{12}}$，由 $2^{-\frac{m-1}{12}}=2^{-1}$，得 $m=13$．