

2-4 多項式不等式

實力養成

基礎題 (每題 5 分, 共 30 分)

1. 解下列不等式：

(1) $x^2 - 5x + 6 < 0$. (2) $-x^2 + 7x - 12 \geq 0$.

解：(1) 原式整理為 $(x-2)(x-3) < 0$ ，得 $2 < x < 3$.(2) 原式整理為 $x^2 - 7x + 12 \leq 0$ ，即 $(x-3)(x-4) \leq 0$ ，得 $3 \leq x \leq 4$.

2. 解下列不等式：

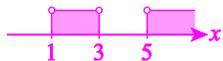
(1) $6x \geq x^2 + 9$. (2) $x^2 - 10x + 25 > 0$.

解：(1) 原式整理為 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ ，即 $(x-3)^2 \leq 0$ ，得 $x = 3$.(2) 原式整理為 $(x-5)^2 > 0$ ，得 $x < 5$ 或 $x > 5$.

3. 解下列不等式：

(1) $(x-1)(x-3)(x-5) > 0$. (2) $(x-1)(x-3)(x-5)(x^2 + 2x + 5) < 0$.

解：(1) 由數線的圖形：

得 $1 < x < 3$ 或 $x > 5$.(2) 因 $x^2 + 2x + 5 > 0$ 恆成立，原不等式的解與 $(x-1)(x-3)(x-5) < 0$ 相同，由數線的圖形得 $x < 1$ 或 $3 < x < 5$.

2 第二章 多項式函數

4. 解下列不等式：

$$(1)(x-1)(x-3)^2(x-5)^3 \geq 0 \quad (2)(x-1)(x-3)^2(x-5)^3 < 0 .$$

解：因 $(x-3)^2 \geq 0$ 恆成立，且 $x=3$ 時 $(x-3)^2 = 0$ ，

且 $(x-5)^3 \geq 0$ 的解與 $x-5 \geq 0$ 相同。

(1) 不等式的解與 $(x-1)(x-5) \geq 0$ 或 $x-3=0$ 相同，得 $x \leq 1$ 或 $x=3$ 或 $x \geq 5$ 。

(2) 不等式的解與 $(x-1)(x-5) < 0$ 且 $x-3 \neq 0$ 相同，得 $1 < x < 3$ 或 $3 < x < 5$ 。

5. 解下列不等式：

$$(1) \frac{x}{x-2} < 0 \quad (2) \frac{x-3}{x+1} > 1 .$$

解：(1) $\frac{x}{x-2} < 0$ 表示分子、分母異號， $x(x-2) < 0$ ，得 $0 < x < 2$ 。

(2) $\frac{x-3}{x+1} - 1 > 0$ ，即 $\frac{-4}{x+1} > 0$ ，即 $x+1 < 0$ ，得 $x < -1$ 。

6. 已知 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解為 $-2 < x < 5$ ，試解不等式 $\frac{cx+2a}{ax+b} < 0$ 。

解： $ax^2 + bx + c < 0$ 的解為 $-2 < x < 5$ ，即 $a(x+2)(x-5) < 0$ 且 $a > 0$ ，

$ax^2 - 3ax - 10a < 0$ ，知 $b = -3a$ ， $c = -10a$ ，

$\frac{-10ax+2a}{ax-3a} < 0$ ，得 $\frac{-10x+2}{x-3} < 0 \Rightarrow (-10x-2)(x-3) < 0$ ，

$(10x-2)(x-3) > 0$ ，得 $x < \frac{1}{5}$ 或 $x > 3$ 。

進階題 (每題 5 分, 共 30 分)

1. 設二次不等式 $f(x) < 0$ 的解為 $-6 < x < 9$, 試求 :

(1) $f(3x) < 0$ 的解 . (2) $f(x+2) < 0$ 的解 .

解 : 設 $f(x) = a(x+6)(x-9)$, 其中 $a > 0$.

(1) $f(3x) = a(3x+6)(3x-9) < 0$ 且 $a > 0$, 即 $(x+2)(x-3) < 0$, 得 $-2 < x < 3$.

(2) $f(x+2) = a(x+8)(x-7) < 0$ 且 $a > 0$, 即 $(x+8)(x-7) < 0$, 得 $-8 < x < 7$.

2. 解不等式 $x^3 - 7x - 6 \leq 0$.

解 : 由牛頓定理 : $x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x+2)(x-3)$,

即 $(x+1)(x+2)(x-3) \leq 0$,



得 $x \leq -2$ 或 $-1 \leq x \leq 3$.

3. 設 $f(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$, 已知 $f(2-i) = 0$, 試解三次不等式 $f(x) < 0$.

解 : $f(x) = 0$ 有一根為 $2-i$, 則另一根為 $2+i$,

$x = 2 \pm i \Rightarrow (x-2)^2 = (\pm i)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$ 即 $f(x)$ 有二次因式 $x^2 - 4x + 5$,

由除法 $f(x) = (x^2 - 4x + 5)(x-3)$,

因 $x^2 - 4x + 5 > 0$ 恆成立, $f(x) < 0$, 即 $x-3 < 0$, 得 $x < 3$.

4 第二章 多項式函數

4. 二次不等式 $ax^2 - bx + 2a - 5 < 0$ 的解為 $-1 < x < 3$ ，試求 a, b 的值。

解：不等式的解為 $-1 < x < 3$ ，知不等式為 $a(x+1)(x-3) < 0$ ，其中 $a > 0$ ，
即 $ax^2 - 2ax - 3a < 0$ ，知 $b = 2a$ 且 $2a - 5 = -3a$ ，得 $a = 1, b = 2$ 。

5. 有一線段長為 a ，且以 $a, a+3, a+6$ 為三邊長圍成一個三角形，

(1) 試求 a 的範圍。

(2) 若此三角形為鈍角三角形，試求 a 的範圍。

解：(1) 任二邊長的和大於第三邊長，又 $a+6 > a+3 > a$ ，

知 $a + (a+3) > a+6$ ，故 $a > 3$ 。

(2) $a^2 + (a+3)^2 < (a+6)^2$ ，即 $a^2 - 6a - 27 < 0$ ， $(a+3)(a-9) < 0$ ，

$-3 < a < 9$ 但 $a > 3$ ，得 $3 < a < 9$ 。

6. 設實係數函數 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ ，若方程式 $f(x) = 0$ 有一根為 $1-3i$ ，
試求不等式 $f(x) < 0$ 的解。

解： $f(x) = 0$ 有一根為 $1-3i$ ，則另一根為 $1+3i$ ，

$$x = 1 \pm 3i \Rightarrow (x-1)^2 = (\pm 3i)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 10 = 0$$

$f(x)$ 有因式 $x^2 - 2x + 10$ ，由除法 $f(x) = (x^2 - 2x + 10)(x+2)(x-3) < 0$ ，

因 $x^2 - 2x + 10 > 0$ 恆成立，即 $(x+2)(x-3) < 0$ ，得 $-2 < x < 3$ 。

情境模擬題 (每題 8 分, 共 40 分)

1. 評估理想體重的標準, 有一種專為華人設計, 身高 H (公尺) 的男生, 其理想體重 W (公斤) 應符合 $W = 22H^2$, 體重在理想體重的 $\pm 10\%$ 範圍內稱為標準體重, 某人身高 170 公分, 請問他標準體重的範圍為何? (取整數)

解: 理想體重 $W = 22(1.7)^2 = 63.58$ (公斤),

設標準體重 W_0 , 則 $0.9W \leq W_0 \leq 1.1W$,

知標準體重約 $57 \leq W_0 \leq 70$.

2. 以每秒 v 公尺的速度自地面垂直向上發射信號彈, 設經 t 秒後的高度 y 公尺, 可依 $y = vt - 4.9t^2$ 公式計算, 則

(1) 若發射後 5 秒時, 信號彈的高度為 245 公尺, 試求初速度 v .

(2) 試求在 245 公尺以上高度的時間有多少秒?

解: (1) $245 = v \cdot 5 - 4.9 \times 5^2$, 得 $v = 73.5$ 公尺/秒.

(2) $y = 73.5t - 4.9t^2 \geq 245$, 整理得 $t^2 - 15t + 50 \leq 0$, $5 \leq t \leq 10$,

得時間共 $10 - 5 = 5$ (秒).

3. 某輛汽車的剎車距離 y (公尺) 與汽車的時速 x (公里/小時), 依車廠公告:

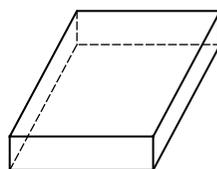
$y = \frac{x^2}{25} - x$, 如果想要剎車距離不得超過 24 公尺, 則行駛的最大速度為時速每小時多少公里?

解: 依題意: $\frac{x^2}{25} - x \leq 24$, $x^2 - 25x - 600 \leq 0$,

$(x+15)(x-40) \leq 0$, 知 $x \leq 40$ (公里/小時), 則最大時速為 40 公里/小時.

6 第二章 多項式函數

4. 郵局想設計一個長方體的盒子，其中有兩個對面是正方形，若限定表面積為 104 平方公寸且此盒子的體積至少 48 立方公寸，試求此盒子中正方形的面之邊長的範圍為何？



解：設所求的邊長為 x ，盒高為 y ，且 $x > 0$ ， $y > 0$

$$\text{表面積 } A = 2x^2 + 4xy = 104,$$

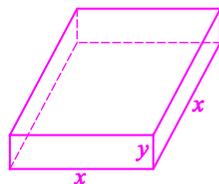
$$\text{體積 } V = x^2y, \text{ 因 } xy = 26 - \frac{1}{2}x^2,$$

$$V = f(x) = 26x - \frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{因體積至少 48 立方公寸，知 } 26x - \frac{1}{2}x^3 \geq 48,$$

$$\text{整理得 } (x+8)(x-2)(x-6) \leq 0,$$

$$\text{知 } 2 \leq x \leq 6, \text{ 至少 2 公寸，最多 6 公寸。}$$



5. 將牛排置入冷凍櫃 k 分鐘時，牛排溫度為 $T^\circ\text{C}$ 且

$$T = \frac{700}{k^2 + 7k + 20},$$

試問要使牛排溫度不大於 5°C 時，最少需要幾分鐘？

解：依題意： $\frac{700}{k^2 + 7k + 20} \leq 5$ ，得 $k^2 + 7k - 120 \geq 0$ ， $(k+15)(k-8) \geq 0$ ，

因 $k \geq 0$ ，知 $k \geq 8$ ，最少需要 8 分鐘。