2-3　多項式方程式

實力養成

基礎題（每題 5 分,共 30 分）

1. 解下列方程式：

(1) $x^2-2x+2=0$．　(2) $x^2-2x+10=0$．

解：(1)不能分解代公式 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=1\pm i$．

(2) 不能分解代公式 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{-9}}{2}=1\pm 3i$．

2. 試問下列各式的值，何者爲正實數？

(1) $\sqrt{2}\sqrt{-8}$　(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}$　(3) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$．

解：(1) $\sqrt{2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\,i=4i$．

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}\,i\cdot 2\sqrt{2}\,i=-4$．

(3) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{2\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}\,i}=2$．

(4) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,i}=\dfrac{2}{i}=-2i$．

故選(3)．

3. 實係數二次方程式 $3x^2+2x+k=0$，若

(1)有兩相等實根時，試求 k 值．

(2)有兩共軛虛根時，試求 k 的範圍．

解：判別式 $D=4-4\cdot 3\cdot k=4(1-3k)$．

(1) 有兩相等實根 $D=0$，知 $k=\dfrac{1}{3}$．

(2) 有兩共軛虛根 $D<0$， $4(1-3k)<0\Rightarrow 1-3k<0$，知 $k>\dfrac{1}{3}$．

4. 設α，β是方程式$2x^2-5x+7=0$的二根，試求以$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$爲二根的二次方程式．

解：因$\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}$， $\alpha\beta=\dfrac{7}{2}$，

設新方程式爲$x^2+px+q=0$，

$-p=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{5}{7}$， $p=-\dfrac{5}{7}$，

$q=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{7}$，

新方程式爲$x^2-\dfrac{5}{7}x+\dfrac{2}{7}=0$， 即$7x^2-5x+2=0$ ．

5. 設$f(x)=x^3-7x-6$， 則

(1)試求$f(x)$的所有整係數一次因式．

(2)解方程式$f(x)=0$ ．

解：由牛頓定理：若整係數一次因式$ax-b\,|\,f(x)\Rightarrow a\,|\,1, b\,|\,-6$

$a=\pm1\quad b=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\Rightarrow\dfrac{b}{a}=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

因爲$f(-1)=0,\quad f(-2)=0,\quad f(3)=0\Rightarrow x+1\,|\,f(x), x+2\,|\,f(x), x-3\,|\,f(x),$ ，

所以$f(x)=(x+1)(x+2)(x-3)$ ．

(1)一次因式有$x+1$， $x+2$， $x-3$ ．(2) $f(x)=0$的三根爲-1， -2及 3 ．

6. 設$f(x)=x^3-3x+1$， 已知$f(x)=0$有三個相異實根， 則

(1) $f(x)=0$的三根分別介於哪兩個連續整數之間？

(2)試求$f(x)=0$的最小正根（四捨五入到小數點後第一位）.

解：(1)

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$f(x)$	…	-1	3	1	-1	3	…

三根分別介於-2與-1， 0 與 1， 1 與 2 之間．

(2)若最小正根爲α， 則$0<\alpha<1$，

$f(0.3)=0.127>0$， $f(0.4)=-0.136<0$， $0.3<\alpha<0.4$，

又$f(0.35)<0$， 知$0.3<\alpha<0.35$， 得$\alpha\approx0.3$ ．

進階題 (每題 5 分,共 30 分)

1. 實係數二次方程式 $kx^2+4x+k=0$，則
(1)有兩相等實根時，試求 k 值．
(2)有兩共軛虛根時，試求 k 的範圍．

解：判別式 $D=16-4k^2=-4(k+2)(k-2)$ ．

(1) 有兩相等實根 $D=0$，得 $k=-2$ 或 $k=2$ ．

(2) 有兩共軛虛根 $D<0$，即 $(k+2)(k-2)>0$，得 $k<-2$ 或 $k>2$ ．

2. 設 $f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$，
(1)試求 $f(x)$ 的所有整係數一次因式．
(2)解方程式 $f(x)=0$ ．

解：由牛頓定理：若整係數一次因式 $ax-b\,|\,f(x)\Rightarrow a\,|\,3,\ b\,|-2$

$$a=\pm1,\pm3\quad b=\pm1,\pm2\Rightarrow\frac{b}{a}=\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}$$

因為 $f(\frac{1}{3})=0$ ，$3x-1\,|\,f(x)$，由除法　$f(x)=(3x-1)(x^2+2x+2)$ ．

(1)一次因式有 $3x-1$ ．

(2) $f(x)=0$ 的有理根為 $\frac{1}{3}$，虛根為 $-1\pm i$ ．

3. 已知 a，b 都是實數．
(1)設 $3+i$ 是方程式 $x^2+ax+b=0$ 的一根，試求 b 值．
(2)設 $3+i$ 是方程式 $x^2-(a+i)x-(b+i)=0$ 的一根，試求 a 值．

解：(1)實係數方程式一根為 $3+i$，則另一根為 $3-i$，兩根積　$b=(3+i)(3-i)=10$ ．

(2)將 $3+i$ 代入方程式中，$(8+6i)-(a+i)(3+i)-(b+i)=0$，
即 $(9-3a-b)+(2-a)i=0$，得 $a=2$ ．

4. 設 a，b 為實數，且 $f(x)=x^3+ax^2+bx+20$，若 $f(x)=0$ 有一根為 $2-i$，試求 $f(x)=0$ 的實根．

解：$f(x)=0$ 有一根為 $2-i$，必有另一根為 $2+i$，

$x=2\pm i \Rightarrow (x-2)^2=(\pm i)^2 \Rightarrow x^2-4x+5=0$　即 $f(x)$ 有二次因式 x^2-4x+5，

由除法 $f(x)=(x^2-4x+5)(x+4)$，　$f(x)=0$ 的實根為 -4．

5. 設 $f(x)=x^3-9x^2+16x-14$，若 $f(x)=0$ 有兩相異複數根，$a+i$，$1+bi$，其中 a，b 是不為 0 的實數，試求 $f(x)=0$ 的實根．

解：虛根成對，知有 $a+i$ 必有 $a-i$，有 $1+bi$ 必有 $1-bi$，

但 $f(x)=0$ 最多只有二個虛根，$\begin{cases} a+i=1-bi \\ a-i=1+bi \end{cases}$，得 $a=1$，$b=-1$，

$f(x)$ 有二根 $1+i$，$1-i$，$x=1\pm i \Rightarrow (x-1)^2=(\pm i)^2 \Rightarrow x^2-2x+2=0$

$f(x)$ 有因式 x^2-2x+2，由除法 $f(x)=(x^2-2x+2)(x-7)=0$ 知實根為 $x=7$．

6. 設 $f(x)=x^4-15$，已知 $f(x)=0$ 有二個實根及兩虛根，則

(1)請問 $f(x)=0$ 的二實根分別介於哪兩個連續整數之間．

(2)解方程式 $f(x)=0$．

解：(1)

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$f(x)$	…	1	-14	15	-14	1	…

二實根分別介於 -2 與 -1，1 與 2 之間．

(2)由 $x^4-15=(x^2-\sqrt{15})(x^2+\sqrt{15})=(x-\sqrt[4]{15})(x+\sqrt[4]{15})(x-\sqrt[4]{15}i)(x+\sqrt[4]{15}i)$

$f(x)=0$ 的四根中，　二實根 $\pm\sqrt[4]{15}$，二虛根 $\pm\sqrt[4]{15}\,i$．

情境模擬題（每題 8 分,共 40 分）

1. 某個十字路口的「閃黃燈秒數」以 $f(v)$ 表示，已知 $f(v)$ 是根據該路段的最高時速限制每小時 v 公里而設計，滿足 $f(v)=\dfrac{v}{10}+\dfrac{90}{v}-1$. 若測得閃黃燈秒數爲 5 秒時，試問該路段的最高時速限制是每小時多少公里？

 解：$5=\dfrac{v}{10}+\dfrac{90}{v}-1$,

 得 $v^2-60v+900=0$，即 $(v-30)^2=0$， $v=30$（公里/小時）.

2. 有印刷不清的試卷，只能看清「實係數三次方程式 $x^3-7x^2+\cdots=0$，有三相異根 $3+pi$ 與 $q-i$ 及⋯」，試求原來的方程式 .

 解：設方程式 $f(x)=x^3-7x^2+ax+b=0$,

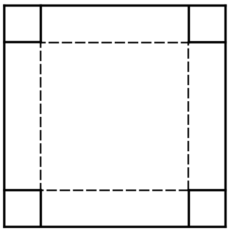
 由複數的共軛關係知有一根爲 $3+pi$, 則另一根則爲 $3-pi=q-i$， $p=1$，$q=3$,

 三根 $3+i$， $3-i$， α， 由三根和爲 7，知另一根 α 爲 1 ,

 $x=3\pm i\Rightarrow(x-3)^2=(\pm i)^2\Rightarrow x^2-6x+10=0$

 $f(x)=(x-1)(x^2-6x+10)=0$，即 $f(x)=x^3-7x^2+16x-10=0$.

3. 有一張邊長爲 24 公分的正方形硬紙板，想從四角各截去大小相等的正方形如右圖，以便摺成一個無蓋的長方盒，且體積爲 972 立方公分，若截去的正方形邊長爲整數，試求此整數 .

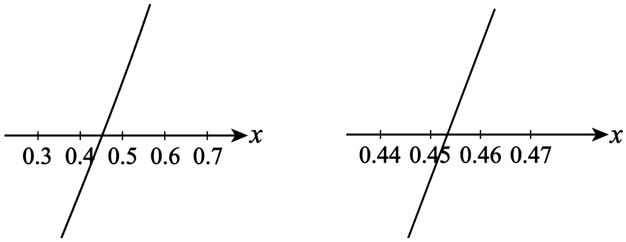


 解：設高度爲 x(即四個全等的正方形邊長) ,

 底面的邊長爲 $24-2x$， $x(24-2x)^2=972$,

 即 $x^3-24x^2+144x-243=0$， $(x-3)(x^2-21x+81)=0$，得 $x=3$.

4. 現在可以利用電腦繪圖來求連續函數的根，在函數圖形與 x 軸交點的附近，調整 x 的視窗，重複放大函數圖形若干次．已知 $f(x)=x^3+2x-1$ 的連續放大圖形如下：



則方程式 $x^3+2x-1=0$ 的根為 <u>0.45</u>（四捨五入到小數點以下第二位）．

解：設方程式 $x^3+2x-1=0$ 的根為 α， $f(0.45)<0$， $f(0.46)>0$，知 $0.45<\alpha<0.46$，且 α 較接近 0.45．

5. 某保護區梅花鹿的數量逐年增加．已知第 $n+2$ 年與第 n 年數量的差，會與第 $n+1$ 年的數量成正比，若 2008 年，2009 年，2011 年梅花鹿的數量分別是 39，63 與 123．試推測 2010 年梅花鹿的數量．

解：設 2010 年的數量為 k 隻，依題意：$\dfrac{k-39}{63}=\dfrac{123-63}{k}$，

整理得 $k^2-39k-3780=0$， $(k+45)(k-84)=0$，

因數量逐年增加，知 $63<k<123$，得 $k=84$（隻）．