

## 2-2 多項式的運算

**基礎題** (每題 5 分, 共 30 分)

1. 設  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 2$ , 若  $f(x)$  除以  $g(x)$  得商式為  $x^2 - 2$ , 餘式為  $x + 4$ , 試求  $g(x)$ .

解:  $f(x) = g(x)(x^2 - 2) + x + 4,$

$$f(x) - (x + 4) = (x^2 - 2)g(x),$$

$$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)g(x),$$

$$\text{長除法得 } g(x) = \frac{2x^4 - 3x^3 + 6x - 2}{x^2 - 2} = 2x^2 - 3x + 1.$$

2. 設  $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 3x + 1$ , 試求  $f(x)$  除以  $2x - 1$  的商式與餘式.

解: 由綜合除法:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & +0 & +5 & +3 & +1 \\ & & +2 & +1 & +3 & +3 \\ \hline 2 & 4 & +2 & +6 & +6 & \\ & & 2 & +1 & +3 & +3 \end{array}$$

得商式為  $2x^3 + x^2 + 3x + 3$ , 餘式為 4.

3. 設  $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + 2$ , 試求:

(1)  $f(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$  時,  $a, b, c, d$  的值.

(2)  $f(1.1)$  的值.

解: 綜合除法連續除以  $x-1$  得:

$$(1) f(x) = 3(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 5(x-1) + 6, \text{ 得 } a=3, b=4, c=5, d=6.$$

$$(2) f(1.1) = 3 \times (0.1)^3 + 4 \times (0.1)^2 + 5 \times (0.1) + 6 = 6.543.$$

2 第二章 多項式函數

4. 設  $g(x) = 357x^5 - 699x^4 - 35x^3 + 9x^2 + 37x - 65$ ，試求：

(1)  $g(x)$  除以  $x-2$  的餘式。 (2)  $g(2)$ 。

解：(1)

$$\begin{array}{r} 357 \quad -699 \quad -35 \quad +9 \quad +37 \quad -65 \quad | \quad 2 \\ \underline{\phantom{357} \phantom{-699} \phantom{-35} \phantom{+9} \phantom{+37} \phantom{-65} \phantom{|} \phantom{2} +714 \quad +30 \quad -10 \quad -2 \quad +70} \\ 357 \quad +15 \quad -5 \quad -1 \quad +35 \quad | \quad 5 \end{array}$$

$g(x)$  除以  $x-2$  的餘式為 5。

(2)  $g(2) = 5$ 。

5. 設  $f(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 3$ ，下列何者是  $f(x)$  的因式？

(1)  $2x-1$  (2)  $2x+1$  (3)  $2x-3$  (4)  $2x+3$ 。

解：因  $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ ， $f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$ ， $f(\frac{3}{2}) = 0$ ， $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$ ，故選(3)。

6. 多項函數  $f(x)$  的圖形通過  $(1,0)$ ， $(2,3)$ ， $(3,10)$  且次數為最少，試求函數  $f(x)$ 。

解：由插值多項式：

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 10 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= 0 - 3(x^2 - 4x + 3) + 5(x^2 - 3x + 2) \\ &= 2x^2 - 3x + 1。 \end{aligned}$$

**進階題** (每題 5 分, 共 30 分)

1. 設多項式  $f(x)$  除以  $x^3 - 3$  的商式為  $2x^2 + 4x + 6$ ，餘式為  $3x^2 + 6x + 4$ ，試求  $f(x)$  除以  $x^2 + 2x + 3$  的餘式。

解：由除法原理：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - 3)(2x^2 + 4x + 6) + 3x^2 + 6x + 4, \\ \text{得 } f(x) &= (x^2 + 2x + 3) \cdot 2(x^3 - 3) + 3(x^2 + 2x + 3) - 5 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(2x^3 - 6 + 3) - 5 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(2x^3 - 3) - 5, \end{aligned}$$

知所求餘式為  $-5$ 。

2. 設  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 29x^2 - 52x + 38$ ，試求：

(1)  $f(2.1)$  . (2)  $f(2 + \sqrt{3})$  .

解：以綜合除法連續除以  $x-2$ ，得  $f(x) = (x-2)^4 + 5(x-2)^2 + 2$ ，

$$(1) f(2.1) = (0.1)^4 + 5 \cdot (0.1)^2 + 2 = 2.0501 .$$

$$(2) f(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 + 5(\sqrt{3})^2 + 2 = 26 .$$

3. 設  $f(x) = x^{50} + 2x^{49} + x^{29} + 2x^{28} + 1$ ，試求：

(1)  $f(1)$ ， $f(-2)$  . (2)  $f(x)$  除以  $x^2 + x - 2$  的餘式 .

解：(1)  $f(1) = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7$ ，

$$f(-2) = 2^{50} - 2^{50} - 2^{29} + 2^{29} + 1 = 1 .$$

$$(2) f(x) = (x-1)(x+2)q(x) + ax + b ,$$

$$f(1) = a + b = 7, \quad f(-2) = -2a + b = 1, \quad \text{得 } a = 2, \quad b = 5 ,$$

故  $f(x)$  除以  $x^2 + x - 2$  的餘式為  $2x + 5$  .

4. 設多項式  $f(x) = x^3 + kx^2 + \ell x + m$  ( $k, \ell, m$  為常數)，且滿足：

(1)  $f(x)$  除以  $x^2 + x + 1$ ，得餘式為  $5x - 3$  .

(2)  $f(x)$  除以  $x - 1$ ，得餘式為  $-4$  .

試求  $k, \ell, m$  之值 .

解：設  $f(x) = (x^2 + x + 1)(x + t) + 5x - 3$ ，

$$f(1) = 3(1 + t) + 2 = -4, \quad \text{得 } t = -3 ,$$

$$\text{知 } f(x) = (x^2 + x + 1)(x - 3) + 5x - 3 ,$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6, \quad \text{得 } k = -2, \quad \ell = 3, \quad m = -6 .$$

5. 設  $(x+1)f(x)$  除以  $x^2 + x + 1$  的餘式為  $5x + 3$ ，試求  $f(x)$  除以  $x^2 + x + 1$  的餘式 .

解：設  $f(x) = (x^2 + x + 1)q(x) + ax + b$ ，

$$\begin{aligned} (x+1)f(x) &= (x+1)(x^2 + x + 1)q(x) + (ax + b)(x+1) \\ &= (x+1)(x^2 + x + 1)q(x) + ax^2 + ax + bx + b \\ &= (x^2 + x + 1)[(x+1)q(x)] + a(x^2 + x + 1) + bx + (b - a) \\ &= (x^2 + x + 1)[(x+1)q(x) + a] + bx + (b - a) , \end{aligned}$$

4 第二章 多項式函數

得  $b=5$ ， $b-a=3$ ，即  $a=2$ ，  
故餘式為  $2x+5$ 。

6. 已知三次多項式  $f(x)$  滿足  $f(0)=2$ ， $f(1)=0$ ， $f(2)=0$ ， $f(3)=8$ ，試求  $f(x)$ 。

解：由插值多項式：

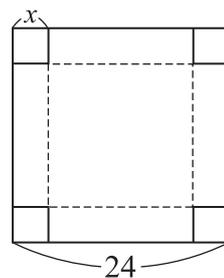
$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \\ &\quad + 8 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\ &= -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) \\ &= (x-1)(x-2)(x+1) \\ &= x^3 - 2x^2 - x + 2。 \end{aligned}$$

**情境模擬題** ( 每題 10 分, 共 40 分 )

1. 小熹以  $x-a$  除  $x^3 + px^2 + qx - 23$  時，將常數項  $-23$  誤看為  $23$  時，誤算所得餘式為  $13$ ，試求正確的餘式。

解：  $x^3 + px^2 + qx + 23 = (x-a)Q(x) + 13$ ，  
 $x^3 + px^2 + qx - 23 = (x-a)Q(x) + 13 - 46$   
 $= (x-a)Q(x) - 33$ ，  
知正確的餘式為  $-33$ 。

2. 有一張邊長為 24 公分的正方形硬紙板，想從四角各截去大小相等的正方形如右圖，以便摺成一個無蓋的長方盒，假設此盒高  $x$  公分，請將其容積以  $x$  的多項式表示。



解：設高度為  $x$ ，底面的邊長為  $24-2x$ ，  
得容積為  $x(24-2x)^2 = 4x^3 - 96x^2 + 576x$  (立方公分)。

3. 小熹練習多項式的除法中，有四次多項式  $f(x)$ ，而且經計算後得知， $f(x)$  除以  $(x-1)^3$  得餘式 3， $f(x)$  除以  $(x-2)$ ， $(x+2)$  分別得餘式 6 及 30，試求多項式  $f(x)$ 。

解：設  $f(x) = (x-1)^3(ax+b)+3$ ,

$$f(2) = (2a+b)+3=6,$$

$$f(-2) = (-27)(-2a+b)+3=30,$$

由  $2a+b=3$ ,  $-2a+b=-1$ , 得  $a=1$ ,  $b=1$ ,

$$f(x) = (x-1)^3(x+1)+3, \text{ 即 } f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 2.$$

4. 某製造玩具工廠，每次接到訂單都需開模 5 萬元，製造每一千個玩具材料費需 2 萬元，由此建立生產的基本成本函數  $f(x) = 5 + 2x$ ，其中  $x$  以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如下關係：

數量（千個）	報價總值（萬元）
5	37.5
10	70
15	97.5

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數  $g(x)$ ，以及獲利函數

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

(1) 若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少萬元。（2 分）

(2) 試求報價總值函數  $g(x)$ 。（7 分）

(3) 根據  $h(x)$ ，試問訂單數量是多少時，獲利總值最高？（5 分）【98 指考乙】

解：(1)  $f(20) = 5 + 2 \times 20 = 45$ ,

得每千個玩具的成本為  $45 \div 20 = 2.25$ （萬元）。

(2) 由插值多項式

$$g(x) = \frac{37.5}{(-5)(-10)}(x-10)(x-15) + \frac{70}{5 \cdot (-5)}(x-5)(x-15) + \frac{97.5}{10 \cdot 5}(x-5)(x-10),$$

$$\text{整理得 } g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 8x.$$

$$(3) h(x) = g(x) - f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 6x - 5 = -\frac{1}{10}(x-30)^2 + 85,$$

得訂單數量  $x = 30$ （千個）時，獲利總值最高。