

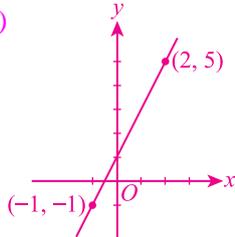
## 2-1 簡單的多項式函數

**基礎題** (每題 5 分, 共 30 分)

1. 設線型函數  $f(x) = 2x + 1$  .

(1) 試作  $y = f(x)$  的圖形 . (2) 若  $-1 \leq x \leq 2$  , 試求  $f(x)$  的最大值與最小值 .

解 : (1)



(2) 最大值  $f(2) = 5$  , 最小值  $f(-1) = -1$  .

2. 將  $y = x^2 - 2x$  的圖形向右平移 2 單位, 向下平移 1 單位, 所得的圖形為二次函數  $y = f(x)$  的圖形, 試求  $f(x)$  .

解 : SOL 一

$y = (x-1)^2 - 1$  的頂點為  $(1, -1)$  ,

圖形向右平移 2 單位, 向下平移 1 單位, 得到新頂點為  $(3, -2)$  ,

$y = (x-3)^2 - 2$  , 即  $f(x) = x^2 - 6x + 7$  .

SOL 二

$y = x^2 - 2x$  的圖形向右平移 2 單位, 向下平移 1 單位,

所得的圖形二次函數  $y + 1 = (x - 2)^2 - 2(x - 2)$  , 即  $y = f(x) = x^2 - 6x + 7$

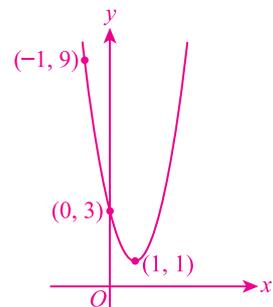
3. 設二次函數  $y = 2(x-1)^2 + 1$  , 試求  $y$  的最大值與最小值 .

(1)  $-1 \leq x \leq 0$  . (2)  $-1 \leq x \leq 2$  .

解 : 作  $y = 2(x-1)^2 + 1$  的圖形如右 :

(1) 最大值  $f(-1) = 9$  , 最小值  $f(0) = 3$  .

(2) 最大值  $f(-1) = 9$  , 最小值  $f(1) = 1$  .



2 第二章 多項式函數

4. 若  $y = ax^2 - 12x + b$ ，在  $x = -\frac{3}{2}$  時有最大值 10，試求  $a, b$  的值。

解：在  $x = -\frac{3}{2}$  時有最大值 10，知  $y = a(x + \frac{3}{2})^2 + 10$  且  $a < 0$ ，

即  $y = ax^2 + 3ax + (\frac{9}{4}a + 10)$ ， $3a = -12$ ，知  $a = -4$ ， $b = 1$ 。

5. 若二次函數  $f(x) = 4x^2 + 8x + k > 3$  恆成立，試求  $k$  的範圍。

解： $4x^2 + 8x + k > 3$  恆成立，即  $4x^2 + 8x + (k - 3) > 0$  恆成立，

二次項係數  $4 > 0$ ，由判別式  $D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot (k - 3) < 0$ ，得  $k > 7$ 。

6. 若  $y = 4x^2 - 7x + k$  的圖形在  $y = x - 3$  圖形的左上方，試求  $k$  的範圍。

解：恆滿足  $4x^2 - 7x + k > x - 3$ ，即  $4x^2 - 8x + (k + 3) > 0$  恆成立，

二次項係數  $4 > 0$ ，由判別式  $D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot (k + 3) < 0$ ，得  $k > 1$ 。

**進階題** (每題 5 分, 共 30 分)

1. 已知  $a, b$  為實數， $f(x) = a(x - 2)^2 + b$  滿足  $f(0) < 0$ ， $f(1) > 0$ ，請判別

(1)  $f(3)$  的正負。(2)  $f(4)$  的正負。

解：圖形對稱於  $x = 2$  且開口向下。

(1)  $f(3) = f(1) > 0$ 。(2)  $f(4) = f(0) < 0$ 。

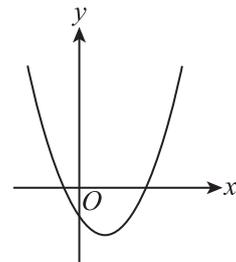
2. 已知  $y = ax^2 + bx + c$  的函數圖形如右圖，請判別

(1)  $a$  的正負。

(2)  $b$  的正負。

(3)  $c$  的正負。

(4)  $b^2 - 4ac$  的正負。



解：(1) 開口向上， $a > 0$ 。

(2) 對稱軸  $x = \frac{-b}{2a} > 0$ ，得  $b < 0$ 。

(3) 圖形與  $y$  軸的交點  $(0, c)$ ，得  $c < 0$ 。

(4) 圖形與  $x$  軸有二個交點，得  $D = b^2 - 4ac > 0$ 。

3. 將  $y = 2x^2 + 4x + a$  的圖形向右平移 1 單位，再向下平移 4 單位後，恰與  $y = bx^2 + cx + 5$  的圖形重合，試求  $a + b + c$  的值。

解：  $y = 2x^2 + 4x + a = 2(x+1)^2 + (a-2)$ ，(配方)

頂點為  $(-1, a-2)$ ，圖形向右平移 1 單位，再向下平移 4 單位，平移後新頂點為  $(0, a-6)$ ，因平移後開口大小一樣，得新方程式為  $y = 2(x-0)^2 + (a-6)$ ，比較係數，知  $b=2$ ， $c=0$ ， $a=11$ ，則  $a+b+c=13$ 。

4. 設  $n$  為整數，令  $p = (3n-1)(n-5)$ ，試求  $p$  的最小值。

解：  $p = 3n^2 - 16n + 5 = 3\left(n - \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{49}{3}$ ，

當  $n = \frac{8}{3}$  時有最小值，但  $n$  為整數，由對稱的概念， $n=3$  時，有最小值  $p = -16$ 。

5. 設  $k$  是不為 2 的實數，若二次函數  $y = kx^2 - 3x - 5k$  的圖形在  $y = 2x^2 - 3x - 5$  的圖形下方（兩圖形沒有相交），試求  $k$  的範圍。

解：由題意知  $2x^2 - 3x - 5 > kx^2 - 3x - 5k$ ，

即  $(k-2)x^2 + (5-5k) < 0$  恆成立，

二次項係數  $k-2 < 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$

且判別式  $D = 0^2 - 4(k-2)(5-5k) < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

由  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  得  $1 < k < 2$ 。

6. 二次函數  $y = 2x^2 + ax + b$  的圖形通過點  $(2, 3)$  且頂點在直線  $y = 4x - 3$  上，試求  $a, b$  的值。

解：因頂點在  $y = 4x - 3$  上，設頂點為  $(k, 4k - 3)$ ，

$y = 2(x-k)^2 + (4k-3)$ ，又通過點  $(2, 3)$ ，

$3 = 2(2-k)^2 + (4k-3)$  得  $(k-1)^2 = 0$ ，知  $k=1$ ，

$y = 2(x-1)^2 + 1$ ，即  $y = 2x^2 - 4x + 3$ ， $a = -4$ ， $b = 3$ 。

### 情境模擬題 (每題 8 分, 共 40 分)

1. 臺灣山岳的溫度，可依每升高 1000 公尺，氣溫降低  $6^\circ\text{C}$  法則推算，若現在海平面的溫度為  $18^\circ\text{C}$ ，請推測：

4 第二章 多項式函數

(1)玉山的排雲山莊，海拔約 2600 公尺高度的氣溫。

(2)玉山主峰山頂，海拔約 4000 公尺高度的氣溫。

解：(1) $18 - 6 \times 2.6 = 2.4$ ，推測排雲山莊約  $2.4^{\circ}\text{C}$ 。

(2) $18 - 6 \times 4 = -6$ ，推測主峰山頂約零下  $6^{\circ}\text{C}$ 。

2. 生物老師想在學校圍牆邊，用竹籬圍出“U”字型的生物園區，如右圖。若竹籬的長度是 40 公尺，試求所圍生物園區的最大面積。



解：設短邊為  $x$  公尺，則長邊為  $40 - 2x$  公尺，所圍面積  $A(x) = x(40 - 2x)$ ，

$A(x) = -2x^2 + 40x = -2(x - 10)^2 + 200$ ，即所圍最大面積為 200 平方公尺。

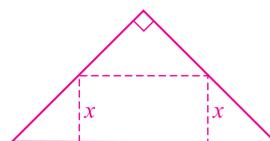
3. 有一片呈等腰直角三角形形狀的花圃，此三角形的斜邊長為 20 公尺。現在想在此花圃中挖出一個面積最大的矩形水池，且水池的一邊是在三角形的斜邊上，試求此水池的最大面積。

解：設不在斜邊的矩形水池邊長為  $x$  公尺，其中  $0 < x < 10$ ，

則斜邊上的邊長為  $20 - 2x$  公尺，

此水池面積  $A(x) = x(20 - 2x)$ ，

$A(x) = -2x^2 + 20x = -2(x - 5)^2 + 50$ ，得水池最大面積為 50 平方公尺。



4. 美術老師想將一個長度為 40 公尺的竹籬圍成一個長方形的區域，為求美感，設定長寬比例滿足  $1.5 \leq \frac{\text{長}}{\text{寬}} \leq 3$ ，試求所圍區域的最大面積。



解：設長  $y$  公尺，寬  $x$  公尺，則  $1.5x \leq y \leq 3x$ ，且  $x + y = 20$ ，得  $5 \leq x \leq 8$ ，

面積  $A(x) = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$ ，

$A(x) = -(x - 10)^2 + 100$ ， $5 \leq x \leq 8$ ，

$x = 8$ ， $y = 12$  時，最大面積  $A = 96$  (平方公尺)。

5. 將一張畫有平面坐標，有二次函數  $y = 2x^2 - 4x + 1$  及  $y = 2x^2 + 8x + 7$  的圖形，發現若沿  $x = k$  的直線對折時，兩函數圖形會重疊，試問此時  $k$  的值。

解：  $y = 2x^2 - 4x + 1$ ，即  $y = 2(x-1)^2 - 1$ ，頂點  $P(1, -1)$ ，  
 $y = 2x^2 + 8x + 7$ ，即  $y = 2(x+2)^2 - 1$ ，頂點  $Q(-2, -1)$ ，  
直線  $x = k$  會通過  $\overline{PQ}$  的中點  $M(-\frac{1}{2}, -1)$ ，得  $k = -\frac{1}{2}$ 。