

1-2 數線上的幾何

基礎題 (每題 5 分,共 30 分)

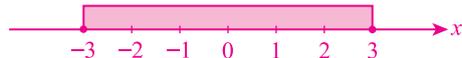
1. 設 x 是實數, 試分別求出 x 的範圍並標示在數線上.

(1) $|x|=3$. (2) $|x|\leq 3$. (3) $|x|\geq 3$.

解: (1) $x=-3$ 或 $x=3$.



(2) $-3\leq x\leq 3$.



(3) $x\leq -3$ 或 $x\geq 3$.



2. 設 x 是實數, 試分別求出 x 的範圍並標示在數線上.

(1) $|x-2|=5$. (2) $|x-2|\leq 5$. (3) $|x-2|\geq 5$.

解: (1) $x-2=-5$ 或 $x-2=5$, 得 $x=-3$ 或 $x=7$.



(2) $-5\leq x-2\leq 5$, 得 $-3\leq x\leq 7$.



(3) $x-2\leq -5$ 或 $x-2\geq 5$, 得 $x\leq -3$ 或 $x\geq 7$.



3. 設 x 是實數, 試分別求出 x 的範圍並標示在數線上.

(1) $|2x-3|=5$. (2) $|2x-3|\leq 5$. (3) $|2x-3|\geq 5$.

解: (1) $2x-3=-5$ 或 $2x-3=5$, 得 $x=-1$ 或 $x=4$.



(2) $-5\leq 2x-3\leq 5\Rightarrow -2\leq 2x\leq 8$, 得 $-1\leq x\leq 4$.



(3) $2x-3\leq -5$ 或 $2x-3\geq 5\Rightarrow 2x\leq 8$, 或 $2x\geq -2$, 得 $x\leq -1$ 或 $x\geq 4$.



2 第一章 數與式

4. 在數線上，設 $A(3)$ ， $B(11)$ ，

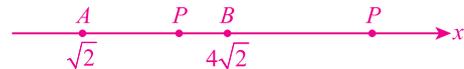
(1) 若 $M(x)$ 是 \overline{AB} 的中點，試求 x 的值。

(2) 若 $P(x)$ 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AP} = 3\overline{PB}$ ，試求 x 的值。

解：(1) 因 \overline{AB} 中點的坐標為 $\frac{3+11}{2} = 7$ ，得 $x = 7$ 。

(2) $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$ ，由分點公式得 $x = \frac{3 \times 11 + 1 \times 3}{3 + 1} = 9$ 。

5. 在數線上，設 $A(\sqrt{2})$ ， $B(4\sqrt{2})$ ，若 $P(x)$ 滿足 $\overline{AP} = 2\overline{BP}$ ，試求 x 的值。

解： 

(1) 點 P 在 \overline{AB} 之間時， $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$ ，

由分點公式得 $x = \frac{2 \times 4\sqrt{2} + 1 \times \sqrt{2}}{2 + 1} = 3\sqrt{2}$ 。

(2) 點 P 在 \overline{AB} 的右側時， $\overline{AB} : \overline{BP} = 1 : 1$ ，

由中點公式得 $4\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} + x}{2}$ ，得 $x = 7\sqrt{2}$ 。

6. 設 x 是實數且 $y = |x+3| + |x-5|$ ，試求 y 的最小值。

解：由三角不等式： $y = |x+3| + |x-5| \geq |(x+3) - (x-5)| = |8| = 8$ ，

得 y 的最小值為 8。

進階題 (每題 5 分, 共 30 分)

1. 設 x 是實數，且滿足 $1 \leq |2x-1| \leq 3$ ，試求出 x 的範圍並標示在數線上。

解： $-3 \leq 2x-1 \leq -1$ 或 $1 \leq 2x-1 \leq 3$ ，

得 x 的範圍為 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $1 \leq x \leq 2$ ，

在數線上為：



2. 已知 x 是實數，且滿足 $-2 \leq x \leq 12$ 。

(1) 將 x 表為 $|x-h| \leq k$ 時，試求 h ， k 的值。

(2)將 x 表為 $|ax+1| \leq b$ 時，試求 a, b 的值。

解：在數線上標示：



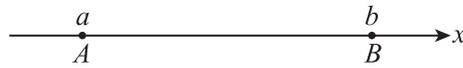
(1) $A(-2)$, $B(12)$ 的中點 $M(5)$ ，得 $|x-5| \leq 7$ ，知 $h=5$, $k=7$ 。

(2) $|x-5| \leq 7$ 同乘 $-\frac{1}{5}$ ，得 $-\frac{1}{5}x+1 \leq \frac{7}{5}$ ，知 $a=-\frac{1}{5}$, $b=\frac{7}{5}$ 。

3. 設 a, b 為實數且 $0 < a < b$ 。

(1)在數線上標示 $P(\frac{3a+b}{4})$, $Q(\frac{a+b}{2})$, $R(\frac{a+3b}{4})$ 的位置。

(2)試比較 $\frac{3a+b}{4}$, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+3b}{4}$ 的大小。



解：(1) $\overline{AP}:\overline{PB}=1:3$, $\overline{AQ}:\overline{QB}=1:1$, $\overline{AR}:\overline{RB}=3:1$ 。



(2)由數線上的位置，得知： $\frac{3a+b}{4} < \frac{a+b}{2} < \frac{a+3b}{4}$ 。

4. 設 a, b 為有理數且 $0 < a < b$, n 是正整數。

(1)請判別 $a < \frac{a+nb}{n+1} < b$ 是否恆成立？

(2)請判別 a, b 之間的有理數個數是否無限多個？

解：(1)在數線上，設 $A(a)$, $B(b)$, $P(\frac{a+nb}{n+1})$ ，則 $\overline{AP}:\overline{PB}=n:1$ ，



由分點公式知 $a < \frac{a+nb}{n+1} < b$ 恆成立。

(2) n 是正整數且 n 有無限多個，
知 a, b 之間的有理數有無限多個。

5. 設 x 是實數，試解不等式： $2|x+1| \leq |x-2|$ 。

解：決定 $|x+1|$, $|x-2|$ 正負的 x 有 $-1, 2$ 。

4 第一章 數與式

- (1) $x \geq 2$ 時, $2(x+1) \leq x-2$, 得 $x \leq -4$, 知無解 .
(2) $-1 \leq x < 2$ 時, $2(x+1) \leq 2-x$, 得 $x \leq 0$, 知 $-1 \leq x \leq 0$.
(3) $x < -1$ 時, $-2(x+1) \leq 2-x$, 得 $x \geq -4$, 知 $-4 \leq x < -1$.
由(1)(2)(3)得 $-4 \leq x \leq 0$.

6. 設 x 是實數且 $y = |x-1| + |x-3|$, 試求 y 的最小值及此時 x 的範圍 .

解 : 決定 $|x-1|$, $|x-3|$ 正負的 x 有 1, 3 .

- (1) $x \geq 3$ 時, $x-1 \geq 0$, $x-3 \geq 0$,
 $y = (x-1) + (x-3) = 2x-4$, 得 $x=3$ 時, $y=2$ 最小 .
(2) $1 \leq x < 3$ 時, $x-1 \geq 0$, $x-3 < 0$,
 $y = (x-1) + (3-x) = 2$ 為定值 .
(3) $x < 1$ 時, $x-1 < 0$, $x-3 < 0$,
 $y = (1-x) + (3-x) = 4-2x > 2$.
由(1)(2)(3)知 y 的最小值為 2, 此時 $1 \leq x \leq 3$.

情境模擬題 (每題 8 分, 共 40 分)

1. 法國物理學家查理 (Charles) 發現在等壓之下, 氣體的體積 V (公升) 與溫度 T ($^{\circ}\text{C}$) 成正比, 現有一莫耳的氫在一大氣壓下

$$V = 0.08213T + 22.4334,$$

若氣體的體積想控制在 20 公升內, 試問溫度需控制在攝氏零下多少度以下? (取整數)

解 : $V = 0.08213T + 22.4334 \leq 20$, $0.08213T + 2.4334 \leq 0$,

$$T \leq \frac{-2.4334}{0.08213} \approx -29.6 \approx -30 \text{ (}^{\circ}\text{C)}.$$

2. 某火力發電廠燒煤發電, 會產生大量的空氣污染, 若精算出要清除 $r\%$ 的空氣污染, 每度電需成本 C 元,

$$C = \frac{4r}{100-r}, \quad 0 \leq r < 100.$$

已知該電廠清除空氣污染的成本不大於 4 元, 試求 r 的最大值 .

解 : 依題意 : $C = \frac{4r}{100-r} \leq 4$, 整理得 $r \leq 50$.

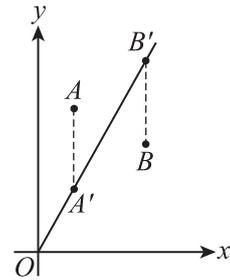
3. 根據都卜勒效應，靜止的行人聽到警車鳴笛聲聲波的頻率是 f ， v （公尺/秒）表消防車接近該行人的車速

$$f = \frac{132000}{330 - v},$$

若測得頻率 f 至少為 440，試問車速至少每秒多少公尺？

解： $\frac{132000}{330 - v} \geq 440$ ， 解得 $v \geq 30$ （公尺/秒）。

4. 有線電視公司的位置在坐標平面上的原點 O ，現有新申請裝機的 $A(1,4)$ ， $B(3,3)$ 的兩戶人家。已知工程人員沿著 $y = mx$ 到達 $A'(1, m)$ ， $B'(3, 3m)$ ，再往北或往南拉線到此兩戶人家，使電路線 $\overline{AA'} + \overline{BB'}$ 為最短時，試求 m 值。



解：電路線長： $L = |m - 4| + |3m - 3|$ ，

(1) $m \geq 4$ 時， $L = 4m - 7 \geq 9$ ， $L = 9$ 時 $m = 4$ 。

(2) $1 \leq m < 4$ 時， $L = 2m + 1$ ，在 $m = 1$ 時， L 有最小值 3。

(3) $m < 1$ 時， $L = -4m + 7 > 3$ ，

知 $m = 1$ 時，電路線最短。

5. 有兩家無線電計程車行，甲家是車資一律 8 折收費，乙家是超過 100 元的車資 7 折計費，即滿 100 元時，收費為 $100 + 0.7|x - 100|$ 。若兩家的收費相同時，原始的車資為多少元？

解：設原始的車資為 x 元，依題意

$0.8x = 100 + 0.7|x - 100|$ ，得 $x = 300$ （元）。