1-1　數與數線

基礎題（每題 5 分,共 30 分）

1. 下列的有理數，哪些可以化爲有限小數？

(1) $\frac{3}{8}$．　(2) $\frac{5}{12}$．　(3) $\frac{7}{40}$．

解：最簡分數中分母只含因數 2 或 5 必可化成有限小數

(1)可以：$\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=0.375$．

(2)不可以：$\frac{5}{12}=\frac{5}{2^2\times 3}=0.41\overline{6}$．

(3)可以：$\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3\times 5}=0.175$．

2. 化簡下列各式：

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}$．　(2) $\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}$．

解：(1)原式 $=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=10\sqrt{2}$．

(2)原式 $=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=10\sqrt{3}$．

3. 化簡下列各式：

(1) $\frac{1}{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+1}$．　(2) $\frac{1}{3+\sqrt{7}}+\frac{1}{3-\sqrt{7}}$．

解：有理化分母

(1)原式 $=\frac{3-\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2}$．

(2)原式 $=\frac{3-\sqrt{7}}{2}+\frac{3+\sqrt{7}}{2}=3$．

4. (1)若 $7+\sqrt{7}$ 在連續整數 n 與 $n+1$ 之間，試求 n 的值．

(2)若 $\sqrt{7+\sqrt{7}}$ 在連續整數 k 與 $k+1$ 之間，試求 k 值．

解：(1)由 $2<\sqrt{7}<3$，得 $9<7+\sqrt{7}=9.\sim<10$，知 $n=9$．

(2)由 $9<7+\sqrt{7}<10$，得 $3<\sqrt{7+\sqrt{7}}=\sqrt{9.\sim}=3.\sim<4$，知 $k=3$．

5. 已知 a，b，c，d 都是整數，

(1)若 $(3+\sqrt{2})^2=a+b\sqrt{2}$，試求 a，b 的值．

(2)若 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=c+d\sqrt{2}$，試求 c，d 的值．

解：(1) $(3+\sqrt{2})^2=3^2+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=11+6\sqrt{2}$，得 $a=11$，$b=6$．

(2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{(9+2)+2\sqrt{18}}=\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$，得 $c=3$，$d=1$．

6. 請比較 $\sqrt{7}+\sqrt{2}$，$\sqrt{6}+\sqrt{3}$，$\sqrt{17}$ 的大小關係．

解：因 $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2=9+2\sqrt{14}=9+7.\sim$，

$(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}=9+8.\sim$，

$(\sqrt{17})^2=9+8$，

($\because$ $2\sqrt{14}=\sqrt{56}=7.\sim$，$2\sqrt{18}=\sqrt{72}=8.\sim$，

由 $56<64<72$，得 $2\sqrt{14}<8<2\sqrt{18}$，

知 $9+2\sqrt{14}<9+8<9+2\sqrt{18}$，得 $\sqrt{7}+\sqrt{2}<\sqrt{17}<\sqrt{6}+\sqrt{3}$．

進階題（每題 5 分,共 30 分）

1. 設 a，b 為有理數，c，d 為無理數，試問何者正確？

(1) ac 必為無理數　(2) $c+d$ 必為無理數

(3) $a+c$ 必為無理數　(4) cd 必為無理數．

解：(1) $0\cdot\sqrt{2}=0$ 是有理數．

(2) $(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$ 是有理數．

(3)設 $a+c=t$，若 t 是有理數時，$c=t-a$，

由 c 是無理數，$t-a$ 是有理數，知 $t=a+c$ 必為無理數．

(4) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ 是無理數．　　故選(3)．

2. 設 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，試求下列各式的值：

(1) $\dfrac{1}{x}-1$．　(2) x^2+x-1．

解：(1) $\frac{1}{x}-1=\frac{2}{\sqrt{5}-1}-1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(2) $x^2+x-1=(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}-1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}-1=0$.

3. 若 $\sqrt{11-\sqrt{72}}$ 的整數部分爲 a，小數部分是 b，試求 $\frac{1}{a-b}+b$ 的值．

解：$\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{(9+2)-2\sqrt{18}}=3-\sqrt{2}=1-1.414....=1.\sim$，

整數部分 $a=1$，小數部分 $b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$，

$\frac{1}{a-b}+b=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+(2-\sqrt{2})=(\sqrt{2}+1)+(2-\sqrt{2})=3$.

4. 已知 a, b 都是正實數時，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 恆成立，有兩正實數 x, y 滿足 $xy=6$ 時，試求 $3x+2y$ 的最小值．

解：設 $a=3x$，$b=2y$，$\frac{3x+2y}{2}\geq\sqrt{(3x)(2y)}=6$，得 $3x+2y\geq12$.

5. 已知 x 爲實數且滿足 $x^2-4x+1=0$，試求：

(1) $x+\frac{1}{x}$ 的值．　(2) $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值．

解：(1) $x^2-4x+1=0$ 同除以 x（$x\neq0$），$x-4+\frac{1}{x}=0$，得 $x+\frac{1}{x}=4$.

(2) $(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}$，

$16=x^2+2+\frac{1}{x^2}$，得 $x^2+\frac{1}{x^2}=14$.

6. 將有理數 $\frac{6}{7}$ 表成循環小數時，試問小數點後第 100 位的數字．

解：$\frac{6}{7}=0.\overline{857142}$，每 6 位爲循環節，

因 $100\div6=16\cdots\cdots4$，知所求的數字爲循環節第四位數字 1 .

情境模擬題（每題 8 分,共 40 分）

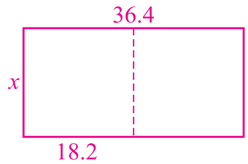
1. 已知油畫的尺寸號碼與其面積成正比，令尺寸為 10 號的 A 畫大小為 53 公分 ×41 公分，若 B 畫為 65 公分×50 公分大小，則 B 畫應是幾號？

解：設 B 畫為 x 號，則 $(53\times 41):(65\times 50)=10:x$， $x=\dfrac{65\times 50\times 10}{53\times 41}\approx 15$（號）.

2. 一張 B4 的紙對摺後剪開可得兩張 B5 的紙，且 B5 與 B4 的紙是相似形，已知 B4 的紙中長邊為 36.4 公分，試求 B4 紙短邊的長度（取整數，四捨五入）.

解：$\dfrac{x}{18.2}=\dfrac{36.4}{x}$，得 $x^2=18.2\times 36.4=(18.2)^2\times 2$，

$x=18.2\times\sqrt{2}\approx 26$（公分）.

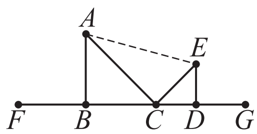


3. 義大利畫家達文西把一線段分成兩段不相等的線段，使得較長的一段與較短的一段之比等於全段與較長一段之比，而這種比值稱為黃金比例，常用 φ 表示：

$\varphi=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$， 試求 $\overline{BP}=\alpha\overline{AB}$ 時的 α 值．

解：$\overline{BP}=\dfrac{1}{\varphi}\overline{AP}=\dfrac{1}{\varphi}\cdot\dfrac{1}{\varphi}\overline{AB}=(\dfrac{1}{\varphi})^2\cdot\overline{AB}$， $\alpha=(\dfrac{1}{\varphi})^2=(\dfrac{2}{\sqrt{5}+1})^2=(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})^2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ ．

4. 如下圖所示：$\overline{FG}$ 是一條長 4 公尺的鐵絲，C 是線段 FG 上的一點，將 $\overline{CG}$ 圍成一個等腰直角三角形 CDE，將 $\overline{CF}$ 圍成另一個等腰直角三角形，試求梯形 $ABDE$ 的面積．



解：令 $\overline{BC}=a$， $\overline{CD}=b$，

因 $\overline{CA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EC}=\overline{FG}$，

得 $\sqrt{2}a+a+a+b+b+\sqrt{2}b=4$，

$(2+\sqrt{2})(a+b)=4$， $a+b=\dfrac{4}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{4(2-\sqrt{2})}{4-2}=4-2\sqrt{2}$，

梯形 $ABDE$ 面積 $\dfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DE})\cdot\overline{BD}=\dfrac{1}{2}(a+b)^2=\dfrac{1}{2}(4-2\sqrt{2})^2=12-8\sqrt{2}$（平方公尺）.

5. 陳先生三年前買了一輛剛出廠的新車買價 100 萬元；該汽車的價值在第一年後折舊 20%，第二年以後每年折舊前一年車價的 15% . 陳先生現在想用這部車換新車，試問舊車可抵__58__萬元 .（萬元以下四捨五入）【98 指考乙】

解：折舊後舊車的車價爲

$100(1-20\%)(1-15\%)(1-15\%)=100\times0.8\times0.85\times0.85=57.8\approx58$（萬元）.