高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：100.07.25					
範圍	4-2 二維數據	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（ 每題 10 分 ）

1. 高二某班第一次期中考數學成績平均 60 分，標準差 10 分；英文成績平均 75 分，標準差 15 分，且兩科成績的相關係數為 0.45，若將全班數學成績加 6 分，英文成績乘 $\frac{5}{6}$ 倍，則

(1)新的數學成績的標準差為____________．

(2)新的英文成績的平均值為____________．

(3)此兩科新成績的相關係數為____________．

解答 (1)10 分;(2)62.5 分;(3)0.45

解析 (1)設數學成績為 x，英文成績為 y，數學成績加 5 分，即 $x+5$，英文成績乘 $\frac{5}{6}$，即 $\frac{5}{6}y$，

$\therefore\ \sigma_{X+5}=\sigma_X=10$（分）．

(2)$(\mu_{\frac{5}{6}Y})=\frac{5}{6}\mu_Y=\frac{5}{6}\times 75=62.5$（分）．

(3)相關係數 $r(X+5,\ \frac{5}{6}Y)=r(X,\ Y)=0.45$．

2.如圖四筆資料 $A(1，2)$，$B(2，1)$，$C(2，4)$與 $D(3，3)$，則：

(1)x，y 之相關係數 $r=$ ____________．(2)又 y 對於 x 的最適合直線為____________．

解答 (1)0.316;(2) $y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x$

解析 $x'_i=x_i-\mu_X$，$y'_i=y_i-\mu_Y$，$\mu_X=2$，$\mu_Y=\frac{5}{2}$，

	x	y	x'	y'	$x'y'$	x'^2	y'^2
	1	2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$
	2	1	0	$\frac{-3}{2}$	0	0	$\frac{9}{4}$
	2	4	0	$\frac{-4}{3}$	0	0	$\frac{9}{4}$
	3	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$
合計					1	2	5

(1) $r=\dfrac{\sum x_i'y_i'}{\sqrt{\sum x'^2}\cdot\sqrt{\sum y'^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\approx 0.316$．

(2)由 $y=\mu_Y+r\cdot\dfrac{\sqrt{\sum {y'_i}^2}}{\sqrt{\sum {x'_i}^2}}(x-\mu_X)$得 $y=\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(x-2)$，

$\therefore$ y 對 x 之最適合直線 $y=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}(x-2)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}x$.

3.若兩變數 X，Y 的相關係數爲 0.6，而另兩變數 U，V 恆有 $U=3X+2$，$V=2Y-3$ 的關係，則 U 與 V 的相關係數 ＝__________ .

解答 0.6

解析 由相關係數的性質可知，U 與 V 的相關係數也是 0.6 .

4.兩組數值資料 $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_{20} \\ \hline Y & y_1 & y_2 & \cdots & y_{20} \end{array}$. 已知 $\sum_{i=1}^{20} x_i = 30$ ， $\sum_{i=1}^{20} y_i = 10$ ，又 X 的標準差 $\sigma_X = 5$，Y 的標準差 $\sigma_Y = 8$，$\sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 365$，則 X ，Y 的相關係數爲__________ .（答案化爲小數點）

解答 0.4375

解析 已知 $\sum_{i=1}^{20} x_i = 30$ ， $\sum_{i=1}^{20} y_i = 10$ ，

$\therefore$ X 的算術平均數 $\mu_X = \dfrac{30}{20} = 1.5$ ， Y 的算術平均數 $\mu_Y = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$ ，

由公式，相關係數 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i y_i - x_i\mu_Y - y_i\mu_X + \mu_X\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - \mu_Y\sum_{i=1}^{20} x_i - \mu_X\sum_{i=1}^{20} y_i + \sum_{i=1}^{20}\mu_X\mu_Y}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

$$= \frac{365 - \frac{1}{2}\times 30 - 1.5\times 10 + 20\times\frac{1}{2}\times 1.5}{20\times 5\times 8} = \frac{7}{16} = 0.4375 \ .$$

5.設有兩組變量 X 與 Y $\begin{cases} X: x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10} \\ Y: y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{10} \end{cases}$, 已知 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 11$ ， $\sum_{i=1}^{10} x_i^{\ 2} = 32.1$ ， $\sum_{i=1}^{10} y_i = 14$ ， $\sum_{i=1}^{10} y_i^{\ 2} = 39.6$ ， $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 28$，求(1)這兩組變量 X 與 Y 的相關係數 $r=$__________ .

(2)滿足這十個點 $(x_1,\ y_1)$ ， $(x_2,\ y_2)$ ， $\cdots$， $(x_{10},\ y_{10})$ 的最適合直線方程式__________ .

解答 (1)0.63;(2) $y=0.63x+0.707$

解析 (1) $\mu_X = \dfrac{11}{10} = 1.1$， $\mu_Y = \dfrac{14}{10} = 1.4$ ，

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^{\ 2} - (\mu_X)^2} = \sqrt{2} \ , \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^{\ 2} - (\mu_Y)^2} = \sqrt{2} \ ,$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\mu_X\mu_Y}{n\sigma_X\sigma_Y} = \frac{28 - 10\times 1.1\times 1.4}{10\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{12.6}{20} = 0.63 \ .$$

(2)最適合直線 $y=a+bx$

$$\Rightarrow\begin{cases}10a+(\sum_{i=1}^{10}x_i)b=\sum_{i=1}^{10}y_i\\(\sum_{i=1}^{10}x_i)a+(\sum_{i=1}^{10}x_i^{\ 2})b=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10a+11b=14\\11a+32.1b=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0.707\\b=0.63\end{cases},$$

$\therefore\ y=0.63x+0.707$.

6.若 $n=12$，$\sum_{i=1}^{12}x_i=120$，$\sum_{i=1}^{12}x_i^{\ 2}=3700$，$\sum_{i=1}^{12}y_i=240$，$\sum_{i=1}^{12}y_i^{\ 2}=8400$，$\sum_{i=1}^{12}x_iy_i=3600$，則相關係數 $r=?$

解答 0.4

解析 $\because\ \mu_X=\frac{120}{12}=10$，$\mu_Y=\frac{240}{12}=20$，

$\therefore\ \sum_{i=1}^{12}x_iy_i-n\mu_X\cdot\mu_Y=3600-12\times10\times20=1200$，

$\sum_{i=1}^{12}x_i^{\ 2}-n\mu_X^{\ 2}=3700-12\times10^2=2500$，　$\sum_{i=1}^{12}y_i^{\ 2}-n\mu_Y^{\ 2}=8400-12\times20^2=3600$，

$\therefore\ r=\frac{1200}{\sqrt{2500}\sqrt{3600}}=\frac{1200}{50\times60}=\frac{2}{5}=0.4$.

7.有甲、乙、丙、丁、戊等五位學生參加性向測驗與成就測驗，兩項測驗的成績如下：

學生	甲	乙	丙	丁	戊
性向 X	4	6	8	8	9
成就 Y	5	4	5	7	9

(1) X 與 Y 的相關係數 $r=$__________ . (2) Y 對 X 的迴歸直線方程式爲__________ .

解答 (1) $\frac{11}{16}$ 0.69;(2) $Y=\frac{19}{16}+\frac{11}{16}X$

解析 (1)相關係數 $=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\mu_Y)^2}}=\frac{11}{16}$.

(2)迴歸直線：$Y=\frac{19}{16}+\frac{11}{16}X$.

8.某公司從民國 73 年到 75 年之固定投資與營業收入如下表，則固定投資與營業收入：

(1)相關係數爲__________ .　　(2)相關程度爲__________ .

年分	固定投資	營業收入
73	5	6
74	7	10
75	12	20

（單位：億元）

解答 (1)1;(2)完全正相關

解析

年分	固定投資 x_i	營業收入 y_i	$x_i-\mu_X$	$y_i-\mu_Y$	$(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)$	$(x_i-\mu_X)^2$	$(y_i-\mu_Y)^2$
73	5	6	–3	–6	18	9	36
74	7	10	–1	–2	2	1	4
75	12	20	4	8	32	16	64
	24	36			52	26	104

$\mu_X=8$，$\mu_Y=12$，

$$\therefore\ \text{相關係數}\ r(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\mu_X)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i-\mu_Y)^2}}=\frac{52}{\sqrt{26}\sqrt{104}}=\frac{52}{52}=1\Rightarrow\text{完全正相關}.$$

9.兩種資料 X 與 Y 如下：$n=100$，$\sum_{i=1}^{100}x_i=8000$，$\sum_{i=1}^{100}x_i^2=648100$，$\sum_{i=1}^{100}y_i=12500$，$\sum_{i=1}^{100}y_i^2=1585000$，$\sum_{i=1}^{100}x_iy_i=1008100$，則：

(1) X 之標準差為____________．　(2) X 與 Y 之相關係數為____________．

解答　(1)9;(2)0.6

解析　(1) $\sigma_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n})^2}\ \Rightarrow\ \sigma_X=\sqrt{\frac{648100}{100}-(\frac{8000}{100})^2}=9$ ．

(2) X 與 Y 之相關係數為 $\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_i)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2}}$

$$=\frac{100\cdot1008100-8000\cdot12500}{\sqrt{100\cdot648100-(8000)^2}\sqrt{100\cdot1585000-(12500)^2}}=\frac{810000}{900\cdot1500}=0.6\ .$$

10.某肥皂廠推出一種新產品，在上市前以不同單價 x（單位：十元）調查市場需求量 y（單位：萬盒），結果如下：

x	8	9	10	11	12
y	11	12	10	8	9

，求 x， y 的相關係數 $r=$____________．

解答　–0.8

解析　$\mu_X=10$，$\mu_Y=10$，

$x_i-\mu_X$	–2	–1	0	1	2
$y_i-\mu_Y$	1	2	0	–2	–1

$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)=-2+(-2)+0+(-2)+(-2)=-8,$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)^2=4+1+0+1+4=10,$$

$$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\mu_Y)^2=1+4+0+4+1=10,$$

$$\therefore\ r=\frac{-8}{10}=-0.8\ .$$

11.設三資料$(1,3)$，$(2,4)$，$(3,k)$的迴歸線方程式為$y=-\frac{1}{2}x+4$，求$k=$______________．

解答 2

解析 $\sum_{i=1}^{3}x_i=6$，$\sum_{i=1}^{3}y_i=7+k$，$\sum_{i=1}^{3}x_iy_i=11+3k$，$\sum_{i=1}^{3}x_i^2=14$

$$\Rightarrow \begin{cases}7+k=6\times(-\frac{1}{2})+3\times 4\\ 11+3k=14\times(-\frac{1}{2})+6\times 4\end{cases}，k=2．$$

12.一組 10 個二維數據$(x，y)$，滿足$\sum_{i=1}^{10}x_i=20$，$\sum_{i=1}^{10}y_i=100$，$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=85$，$\sum_{i=1}^{10}y_i^2=1500$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=326$．

(1)求這組數據的相關係數$r=$______________．

(2)求這組數據Y對X的迴歸直線方程式為______________．

(3)利用Y對X的迴歸直線，預測$x=15$時，y的值為______________．

解答 (1) 0.84;(2) $y=\frac{14}{5}x+\frac{22}{5}$;(3) $\frac{232}{5}$

解析 (1) $$r=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-n\mu_X\mu_Y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-n\mu_X^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{10}y_i^2-n\mu_Y^2}}=\frac{326-10\times2\times10}{\sqrt{85-10\times2^2}\times\sqrt{1500-10\times10^2}}=0.84．$$

(2)迴歸直線方程式$y=a+bx$，$$b=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-n\mu_X\mu_Y}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_X)^2}=\frac{326-10\times2\times10}{85-10\times4}=\frac{14}{5}，$$

$\therefore y=a+\frac{14}{5}x$，將$(\mu_X，\mu_Y)=(2，10)$代入，$\therefore a=\frac{22}{5}$，即$y=\frac{22}{5}+\frac{14}{5}x$．

(3) $x=15$代入$y=\frac{22}{5}+\frac{14}{5}x\Rightarrow y=\frac{232}{5}$．

13.現有五筆資料

x	1	2	3	4	5
y	3	5	6	4	2

(1)求x的標準差$\sigma_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}{n}}=$______________．

(2)x，y的相關係數$r(X，Y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)^2}}=$______________．

(3)求y對x的迴歸式（最適合直線）=______________．

解答 (1) $\sqrt{2}$;(2) -0.3;(3) $y=4.9-0.3x$

解析 $\mu_X=(1+2+3+4+5)\div 5=3$， $\mu_Y=(3+5+6+4+2)\div 5=4$，

	x_i	y_i	$x_i-\mu_X$	$(x_i-\mu_X)^2$	$y_i-\mu_Y$	$(y_i-\mu_Y)^2$	$(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)$
	1	3	–2	4	–1	1	2
	2	5	–1	1	1	1	–1
	3	6	0	0	2	4	0
	4	4	1	1	0	0	0
	5	2	2	4	–2	4	–4
合計				10		10	–3

(1) $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)^2}{5}}=\sqrt{2}$.

(2) $r(X,\ Y)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\mu_Y)^2}}=\dfrac{-3}{\sqrt{10\times 10}}=-0.3$.

(3)迴歸式：$y=a+bx$ 滿足$\begin{cases}\mu_Y=a+b\mu_X\\ b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\mu_X)^2}=\dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}}\end{cases}$，

$b=\dfrac{-3}{10}=-0.3$，$a=\mu_Y-b\mu_X=4-(\dfrac{-3}{10})\cdot 3=4.9\quad\Rightarrow\quad y=4.9-0.3x$.

14.設抽樣某班 8 位學生的數學成績（x）與英文成績（y），得到平均數、標準差與相關係數如下：

$\mu_X=65$， $\mu_Y=70$， $\sigma_X=10$， $\sigma_Y=5$， $r=0.8$，

(1)請寫出英文成績（y）對數學成績（x）的迴歸式．____________ .

(2)若此班上某位同學的數學成績 60 分，請預測此生的英文成績．____________ .

解答 (1) $y=44+\dfrac{2}{5}x$;(2)68 分

解析 (1)迴歸式 $y=a+bx\Rightarrow b=r\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=0.8\times\dfrac{5}{10}=\dfrac{2}{5}$， $\therefore\ y=a+\dfrac{2}{5}x$，

將$(\mu_X,\ \mu_Y)=(65,\ 70)$代入，$\therefore a=70-\dfrac{2}{5}\times 65=44$，$\therefore y=44+\dfrac{2}{5}x$.

(2)數學 $x=60$ 代入，英文 $y=44+\dfrac{2}{5}\times 60=68$（分）.

15.設$(X,\ Y)$有成對數據 100 筆，$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_{100},\ y_{100})$，

已知 $\sum\limits_{k=1}^{100}x_k=22500,\ \sum\limits_{k=1}^{100}x_k{}^2=5152500,\ \sum\limits_{k=1}^{100}y_k=8100,\ \sum\limits_{k=1}^{100}y_k{}^2=696100,\ \sum\limits_{k=1}^{100}x_ky_k=1858500$，則 X 與 Y

的相關係數為____________ .

解答 0.6

解析 $\mu_X=\dfrac{1}{100}\sum\limits_{k=1}^{100}x_k=\dfrac{22500}{100}=225$， $\mu_Y=\dfrac{1}{100}\sum\limits_{k=1}^{100}y_k=\dfrac{8100}{100}=81$，

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}{x_k}^2-{\mu_X}^2}=\sqrt{\frac{5152500}{100}-225^2}=\sqrt{51525-50625}=30\ ,$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}{y_k}^2-{\mu_Y}^2}=\sqrt{\frac{696100}{100}-81^2}=\sqrt{6961-6561}=20\ ,$$

$$\therefore r(X,\ Y)=\frac{\sum_{k=1}^{100}x_k y_k-100\mu_X\mu_Y}{100\sigma_X\sigma_Y}=\frac{1858500-100\times225\times81}{100\times30\times20}=\frac{36000}{100\times30\times20}=0.6\ .$$

16.調查某國家一年 5 個地區的香菸與肺癌之相關性，所得到的數據為$(x_i,\ y_i),\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，其中變數 X 表示每人每年香菸消費量（單位：十包），Y 表示每十萬人死於肺癌的人數．若已計算出下列數值：$\sum_{i=1}^{5}x_i=135$，$\sum_{i=1}^{5}{x_i}^2=3661$，$\sum_{i=1}^{5}x_i y_i=2842$，$\sum_{i=1}^{5}y_i=105$，$\sum_{i=1}^{5}{y_i}^2=2209$，則 X 與 Y 的相關係數 $r=$____________．

解答　0.875

解析

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k-\mu_X)^2=\sum_{k=1}^{5}{x_k}^2-54\sum_{k=1}^{5}x_k+\sum_{k=1}^{5}27^2=16\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{5}(y_k-\mu_Y)^2=\sum_{k=1}^{5}{y_k}^2-42\sum_{k=1}^{5}y_k+\sum_{k=1}^{5}21^2=4\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k-\mu_X)(y_k-\mu_Y)=\sum_{k=1}^{5}x_k y_k-21\sum_{k=1}^{5}x_k-27\sum_{k=1}^{5}y_k+\sum_{k=1}^{5}27\times21=7\ ,$$

$$r=\frac{7}{\sqrt{16}\sqrt{4}}=\frac{7}{8}=0.875\ .$$