高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：100.04.27					
範圍	2-2,3 排列、組合 二項式定理	班級 座號	一年____班	姓名	

一、填充題 (每題 10 分)

1. 將 6 本不同的書，分成 3 堆，求下列各種分法數．

(1)每堆各 2 本，有____________種．

(2)各堆分別有 1，1，4 本，再分給甲、乙各一本、丙 4 本，有____________種．

解答　(1)15;　(2)30

解析　(1) $\dfrac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!}=15$ ．　(2) $\dfrac{C_1^6C_1^5C_4^4}{2!}\times 2!\times 1=30$

2. 將 20 個梨分給甲、乙、丙三個人，求下列各情況的分法數：

(1)每個人至少一個，有____________種分法．

(2)甲至少 1 個，乙至少 2 個，丙至少 3 個，有____________種分法．

解答　(1)171;(2)120

解析　(1)先給三人每人 1 個,剩下 17 個梨任意分給三人,分法有 $H_{17}^3=C_{17}^{3+17-1}=C_{17}^{19}=C_2^{19}=171$.

(2)先給甲、乙、丙各 1, 2, 3 個後剩下 14 個梨任意分給三人，　分法有
$H_{14}^3=C_{14}^{3+14-1}=C_{14}^{16}=C_2^{16}=120$ ．

3.將 12 件相同之物品，依下列分法，求方法數：

(1)分給 15 人，每人至多 1 件，則方法有____________種．

(2)分給 3 人，其中一人至少二件，一人至少三件，一人至少四件，則方法有____________種．

解答　(1)455;(2)25

解析　(1) $\dfrac{15!}{12!3!}=455$ ．

(2)分成(2，3，7)，(2，4，6)，(2，5，5)，(3，3，6)，(3，4，5)，(4，4，4)再分三人

共 $3!+3!+\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+3!+\dfrac{3!}{3!}=6+6+3+3+6+1=25$ 種．

4.三枝相同的原子筆，五枝相同的鉛筆，全部分給 10 個小朋友，則：

(1)每人最多一枝，共有____________種分法．

(2)如果八枝筆都不相同，每人最多一枝則分法有____________種．

解答　(1)2520;(2) $P_8^{10}=1814400$

解析　(1)如同 3 個 a，5 個 b，2 個╳在 10 個小朋友位置前的排列，共有 $\dfrac{10!}{3!5!2!}=2520$ 種．

(2)8 枝筆分給 10 個小朋友中的 8 個人，即 10 個人挑 8 個領筆有 $C_8^{10}\times 8!=P_8^{10}$ 種分法．

5. 在數線上有一個運動物體從原點出發；在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點，若經過 6 次跳動後運動物體落在點 -2 處，則此運動物體共有______種不同的跳動方法．

解答　15

解析 由題意知設向正向x次，向負向y次$\Rightarrow \begin{cases} 0+x-y=-2 \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

有 2 次正方向 4 次負方向，即+, +, –, –, –, –的直線排列$\dfrac{6!}{4!2!}=15$種．

6. 設班聯會中有 6 個班代表，有 3 個人競選班聯會主席，每個班代表各投一票，試問下列情形各有多少種可能的投票結果？

(1)採記名投票，且沒有廢票．__________種　(2)採不記名投票，可能有廢票．__________種

解答 (1)729 種;(2)84 種

解析 (1)視爲 6 個相異球放入 3 個不同箱子中，每箱放的球數沒有限制，　方法數$3^6=729$．

(2)有廢票情形，即增加一箱子放廢票，視爲 7 個相同的球放入 3 個不同箱子中，每箱放的球數沒有限制，　方法數有$H_6^4=C_6^{4+6-1}=C_6^9=C_3^9=84$

7. 有 3 個梨，5 個蘋果，分給 3 人，依下列情形方法各有幾種？

(1)每人所得不限．______________種

(2)每人至少分得一個蘋果．______________種

(3)每人至少分得一個梨或蘋果．______________種

解答 (1)210 種;(2)60 種;(3)141 種

解析 (1)梨的分法有$H_3^3=C_3^{3+3-1}=C_3^5=10$，蘋果的分法有$H_5^3=C_5^{3+5-1}=C_5^7=21$，

故全部的方法數爲$10\times 21=210$．

(2)每人先分給 1 個蘋果，剩 2 個蘋果，再將 3 個梨、2 個蘋果分給 3 人，

每人所得不限的方法有$H_3^3\cdot H_2^3=C_3^{3+3-1}\cdot C_2^{3+2-1}=C_3^5\cdot C_2^4=60$．

(3)令U表將 3 個梨、5 個蘋果任意分給 3 人（甲、乙、丙）所有方法所成集合，

又A, B, C依序表甲、乙、丙三人沒分到梨及蘋果的方法，

則所求爲$|A'\cap B'\cap C'|=|(A\cup B\cup C)'|$，

又$|A\cup B\cup C|=C_1^3|A|-C_2^3|A\cap B|+C_3^3|A\cap B\cap C|$，

其中$|A|$表將 3 個梨、5 個蘋果任意分給乙、丙二人的方法數，

故$|A|=H_3^2\times H_5^2=C_3^{2+3-1}\times C_5^{2+5-1}=4\times 6=24=|B|=|C|$，

而$|A\cap B|=H_3^1\times H_5^1=C_3^{1+3-1}\times C_5^{1+5-1}=1=|B\cap C|=|C\cap A|$，　$|A\cap B\cap C|=0$，

故每人至少分得一個梨或蘋果的方法數爲

$|A'\cap B'\cap C'|=|U|-|A\cup B\cup C|\ =210-(C_1^3\times 24-C_2^3\times 1+C_3^3\times 0)=210-69=141$．

8. 甲、乙、丙、丁、戊 5 人排成一列，試求：

(1)甲不排首位的排法數．__________種

(2)甲不排首位，乙不排中的排法數，丙不排末的排法數．__________種

解答 (1)96 種;(2)64 種

解析 (1)（全部的排法）–（甲排首的排法）$=5!-4!=96$種．

(2)三個人的錯排 $=C_0^3\times 5!-C_1^3\times 4!+C_2^3\times 3!-C_3^3\times 2!=120-72+18-2=64$種．

9. 有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人排成一列，試求：

(1)甲在乙的左方的排法數．_______種　(2)甲在乙的左方且丙也在乙的左方的排法數．_______種

解答 (1)2520 種;(2)1680 種

解析

(1)先排 ○、○、丙、丁、戊、己、庚 7 人再將甲排左邊的○，乙排右邊的○，

甲−乙 排列數爲 $\frac{7!}{2!}\times1\times1=5040\times\frac{1}{2}=2520$ 種．

(2)先排 ○、○、○、丁、戊、己、庚 7 人再將丙排最右邊的○，左邊的 2 個○排甲乙

(甲−乙−丙)或(乙−甲−丙)的排列數爲 $\frac{7!}{3!}\times1\times2!=1680$ 種．

10.有 4 位男生及 3 位女生排成一列，求：

(1)若要求男生須排在一起，女生亦須排在一起，其排法有__________種．

(2)若要求男女生相間隔排在一起，其排法有__________種．

解答 (1)288;(2)144

解析 (1)將 4 位男生視爲一體，3 位女生視爲一體，排法有 2！種，

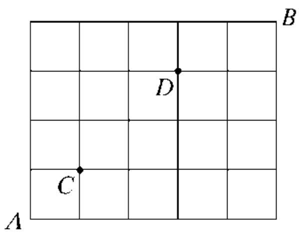
4 位男生交換位置，排法有 4！種，3 位女生交換位置，排法有 3！種，

故排列數 $=2!\times4!\times3!=288$．

(2)將 4 位男生先排，排法有 4！種，

4 位男生間的 4 個空隙 3 個女生排法有 3！種，故排列數 $=4!\times3!=144$．

11.如圖，由 A 到 B 走捷徑，求經過 C 但不過 D 的走法有__________種．



解答 34

解析 經過 C 且不過 $D=$(經過 C) − (經過 C 且經過 D)

$$=\left(\frac{2!}{1!1!}\times\frac{7!}{4!3!}\right)-\frac{2!}{1!1!}\times\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!1!}=70-36=34.$$

12.將 2 紅球，3 白球，4 黑球（球皆相同），求：

(1)若分給 9 人，有__________種分法．

(2)若分給 11 人，有__________種分法．

解答 (1)1260;(2)69300

解析 (1) 紅, 紅, 白, 白, 白, 黑, 黑, 黑, 黑 的排列：$\frac{9!}{2!3!4!}=1260$（種）．

(2) 紅, 紅, 白, 白, 白, 黑, 黑, 黑, 黑,╳,╳ 的排列：$\frac{11!}{2!3!4!2!}=69300$（種）．

13.$(3x-\frac{2}{3}y)^5$ 展開式中，求： (1)共有__________項． (2)其中 x^4y 的係數爲__________．

解答 (1)6;(2)−270

解析 (1)$(3x-\frac{2}{3}y)^5$ 展開式中， x, y 的次數和爲 5，共有 $H^2_5=C^6_5=C^6_1=6$ 項．

(2)x^4y 項爲 $C^5_1(3x)^4(\frac{-2}{3}y)^1=5\times3^4\times(\frac{-2}{3})(x^4y)=-270x^4y$，$x^4y$ 係數爲 -270．

14.$(x+\frac{2}{x^2})^{10}$展開式中，求： (1)x^4的係數爲＿＿＿＿＿＿． (2)各項係數和爲＿＿＿＿＿＿．

解答 (1)180;(2)59049

解析 設在$(x+\frac{2}{x^2})^{10}$展開式中，一般項爲 $C_r^{10}x^{10-r}(\frac{2}{x^2})^r C_r^{10}x^{10-r}\cdot 2^r\cdot(x^{-2})^r=C_r^{10}2^r\cdot x^{10-3r}$，

(1)$x^{10-3r}=x^4$，即 $10-3r=4$，所以 $r=2$，x^4項的係數爲 $C_2^{10}(2)^2=180$．

(2)$(x+\frac{2}{x^2})^{10}$的各項係數和即 $x=1$ 代入$\Rightarrow$各項係數和爲$(1+\frac{2}{1})^{10}=3^{10}=59049$．

15.(1)$(2x^2+\frac{3}{2x})^6$展開式的常數項 =＿＿＿． (2)$(2x^2-\frac{3}{2x})^6$展開式，係數爲負數的項共有＿＿項．

解答 (1)$\frac{1215}{4}$;(2)3

解析 設$(2x^2+\frac{3}{2x})^6$展開式的一般項 $C_r^6\ (2x^2)^{6-r}(\frac{3}{2x})^r=C_r^6\cdot 2^{6-r}\cdot x^{2(6-r)}\cdot(\frac{3}{2}\cdot x^{-1})^r$

$=C_r^6\cdot 2^{6-r}\cdot(\frac{3}{2})^r x^{12-3r}$

(1) $x^{12-3r}=x^0$，所以 $r=4$，常數項爲 $C_4^6(2)^2\cdot(\frac{3}{2})^4=\frac{1215}{4}$，

(2) $(2x^2-\frac{3}{2x})^6$係數爲負數的項爲 $C_r^6\ (2x^2)^{6-r}(\frac{-3}{2x})^r$中，$r$ 爲奇數項的個數，

此時，$r=1$，3，5，所以，共有 3 項係數是負數．

16.設 a 爲實數，$(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中，x^4的係數爲 80，則：

(1)$a=$＿＿＿＿＿＿． (2)展開式中係數的最大值爲＿＿＿＿＿＿．

解答 (1)2;(2)80

解析 $(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中，一般項爲 $C_r^5(ax^2)^{5-r}\cdot(\frac{1}{x})^r$

$=C_r^5\cdot a^{5-r}\cdot x^{2(5-r)}\cdot x^{-r}=C_r^5\cdot a^{5-r}\cdot x^{10-3r}$，

(1) x^4的係數爲 80，即 $10-3r=4$，$r=2$，且係數 $C_2^5a^3=80$，$a^3=8$，$a=2$．

(2)$(2x^2+\frac{1}{x})^5$展開式的各項係數分別爲 2^5，5×2^4，10×2^3，10×2^2，5×2，1，最大 80．

17.$a\in\mathbb{R}$，設$(ax^2-\frac{1}{x})^5$展開式中，x^4項係數爲 270，求$\frac{1}{x^2}$項係數爲＿＿＿＿＿＿．

解答 15

解析 $(ax^2-\frac{1}{x})^5$展開式中，一般項爲 $C_r^5(ax^2)^{5-r}\cdot(-\frac{1}{x})^r$

$=C_r^5\cdot a^{5-r}\cdot x^{2(5-r)}\cdot(-1)^r\cdot x^{-r}=C_r^5\cdot a^{5-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{10-3r}$，

x^4的係數爲 270，即 $10-3r=4$，$r=2$，且係數$C_2^5\cdot a^3\cdot(-1)^2=10a^3=270$，$a=3$，

當 $10-3r=-2\Rightarrow r=4$ ，$\dfrac{1}{x^2}$項係數$C_4^5\cdot 3^1\cdot(-1)^3=-15$

18.$(x+\dfrac{2}{x^2})^{10}$展開式中，x^{-2}的係數爲____________ .

解答 3360

解析 $(x+\dfrac{2}{x^2})^{10}$的一般項爲 $C_r^{10}x^{10-r}(2x^{-2})^r=C_r^{10}2^rx^{10-r-2r}=C_r^{10}2^rx^{10-3r}$,

x^{-2}項 $\Rightarrow$ $10-3r=-2$ $\Rightarrow$ $r=4$，係數爲 $C_4^{10}2^4=210\times16=3360$.

19.11^{15}乘開後,

(1)個位數字爲____________，(2)十位數字爲____________，(3)百位數字爲____________ .

解答 (1)1;(2)5;(3)6

解析 $11^{15}=(1+10)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_k^{15}10^k$

$=1+C_1^{15}10+C_2^{15}(10)^2+C_3^{15}10^3+\cdots+C_{15}^{15}10^{15}$

$=1+150+10500+1000(C_3^{15}+\cdots+C_{15}^{15}10^{12})$

$=10651+1000(C_3^{15}+\cdots+C_{15}^{15}10^{12})$,

故(1)個位數字 1，(2)十位數字 5，(3)百位數字 6 .