高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：100.03.23					
範圍	2-1 集合與計數法則	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充、證明題(每題 10 分)

1.集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，則集合$(A-B)\cup(B-A)=$____________．

解答 $\{1,4,5\}$

解析 $A-B=A-(A\cap B)=\{1,2,3\}-\{2,3\}=\{1\}$，

$B-A=B-(A\cap B)=\{2,3,4,5\}-\{2,3\}=\{4,5\}$，

故$(A-B)\cup(B-A)=\{1,4,5\}$．

2.若高一同學共 1000 人，其中喜愛數學的有 500 人，喜愛音樂的有 700 人，則兩者都喜愛的最多有(1)____________人，最少有(2)____________人．

解答 (1)500;(2)200

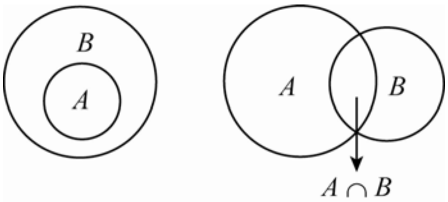
解析 設集合 A 為喜愛數學的人，集合 B 為喜愛音樂的人，則 $n(A)=500$，$n(B)=700$，

(1)當 $A\subset B$ 時，$n(A\cap B)=500$ 為最多．

(2)當 $n(A\cup B)=1000$ 時，

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap)$

$\Rightarrow$ $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=500+700-1000=200$ 為最少．



3.設 $A=\{1,3,x^2-x-3\}$，$B=\{2,x+1,2x^2+x-2,-2x+1\}$，若 $A\cap B=\{-1,3\}$，則 $x=$__________.

解答 -1

解析 $\because$ $x^2-x-3=-1$ $\Rightarrow$ $x=-1,2$，

$x=-1$ $\Rightarrow$ $B=\{2,0,-1,3\}$；

$x=2$ $\Rightarrow$ $B=\{2,3,8,-3\}$（不合），$\therefore$ $x=-1$．

4.設 $A=\{x\mid\sqrt{x}\in\mathbb{N}，x\in\mathbb{N}$ 且 $x\le 10^4\}$，$B=\{x\mid x=20k，k\in\mathbb{N}\}$，則 $n(A-B)$值為____________．

解答 90

解析 $A=\{x\mid\sqrt{x}\in\mathbb{N}，x\in\mathbb{N}$ 且 $x\le 10^4\}=\{1^2,2^2,3^2,\cdots,(10^2)^2\}$ $\Rightarrow$ $n(A)=100$，

$A\cap B=\{2^2\cdot 5^2\cdot 1^2,\ 2^2\cdot 5^2\cdot 2^2,\ 2^2\cdot 5^2\cdot 3^2,\ \cdots,\ 2^2\cdot 5^2\cdot 10^2\}\Rightarrow n(A\cap B)=10$，

$\therefore$ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=100-10=90$．

5.某班人數 60 人，在第一次月考英文、數學、國文三科中，國文及格者 42 人，英文及格者 41 人，數學及格者 39 人，國、英不及格者 11 人，國、數不及格者 13 人，英、數不及格者 14 人，至少一科不及格者 29 人，則：

(1)三科均不及格的人數為____________人．(2)至少有二科不及格的人數為____________人．

解答 (1) 9;(2) 20

解析 設$\begin{cases} A：國文不及格者之集合 \\ B：英文不及格者之集合 \\ C：數學不及格者之集合 \end{cases}$，則 $n(A)=18$，$n(B)=19$，$n(C)=21$，$n(A\cap B)=11$，

$n(B\cap C)=14$，$n(C\cap A)=13$，$n(A\cup B\cup C)=29$，

(1) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$，

$29=18+19+21-11-14-13+n(A\cap B\cap C)$，得 $n(A\cap B\cap C)=9$，

即三科均不及格的人數為 9 人．

(2) 所求 $=n[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)]$

$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-n[(A\cap B)\cap(B\cap C)]$

$-n[(B\cap C)\cap(C\cap A)]-n[(C\cap A)\cap(A\cap B)]+n[(A\cap B)\cap(B\cap C)\cap(C\cap A)]$

$=11+14+13-9-9-9+9=20$．

6.小於 1000 的自然數中，

(1)不是 3 且不是 5 的倍數者有__________個．

(2)是 3 或 5 或 7 的倍數者有__________個．

(3)是 3 或 5 但不為 7 的倍數者有__________個．

解答 (1)533;(2)542;(3)400

解析 $[x]$表不大於 x 的最大整數

(1) $|A_3'\cap A_5'|=|(A_3\cup A_5)'|=|U|-|(A_3\cup A_5)|$

$=|U|-(|A_3|+|A_5|-|A_3\cap A_5|)$

$=999-([\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]-[\frac{999}{15}])=999-333-199+66=533$．

(2) $|A_3\cup A_5\cup A_7|=|A_3|+|A_5|+|A_7|-|(A_3\cap A_5)|-|(A_5\cap A_7)|-|(A_7\cap A_3)|+|A_3\cap A_5\cap A_7|=$

$=[\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]+[\frac{999}{7}]-[\frac{999}{15}]-[\frac{999}{35}]-[\frac{999}{21}]+[\frac{999}{105}]=542$．

(3) $|(A_3\cup A_5)-A_7|=|A_3\cup A_5|-|(A_3\cup A_5)\cap A_7|$

$=(|A_3|+|A_5|-|A_3\cap A_5|)-|A_5\cap A_7|-|A_3\cap A_7|+|A_3\cap A_5\cap A_7|$

$=([\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]-[\frac{999}{15}])-[\frac{999}{35}]-[\frac{999}{21}]+[\frac{999}{105}]=400$．

7.301 至 600 之間的正整數，則：

(1)有__________個 2 或 3 或 5 的倍數． (2)有__________個 4 或 6 或 15 的倍數．

解答 (1)220;(2)110

解析 (1)設 301 到 600 中的正整數，為 2，3，5 的倍數各形成一個集合 A，B，C，則

$|A|=[\frac{600}{2}]-[\frac{300}{2}]=150$，$|B|=[\frac{600}{3}]-[\frac{300}{3}]=100$，$|C|=[\frac{600}{5}]-[\frac{300}{5}]=60$，

$|A\cap C|=[\frac{600}{10}]-[\frac{300}{10}]=30$，$|A\cap B|=[\frac{600}{6}]-[\frac{300}{6}]=50$，

$|B\cap C|=[\frac{600}{15}]-[\frac{300}{15}]=20$， $|A\cap B\cap C|=[\frac{600}{30}]-[\frac{300}{30}]=10$，

由排容原理可得$|A\cup B\cup C|=150+100+60-50-20-30+10=220$．

(2)設 301 到 600 的正整數為 4，6，15 的倍數各形成一個集合 A，B，C，則

$$|A|=[\frac{600}{4}]-[\frac{300}{4}]=75，|B|=[\frac{600}{6}]-[\frac{300}{6}]=50，|C|=[\frac{600}{15}]-[\frac{300}{15}]=20，$$

$$|A\cap B|=[\frac{600}{12}]-[\frac{300}{12}]=25，|B\cap C|=[\frac{600}{30}]-[\frac{300}{30}]=10，$$

$$|C\cap A|=[\frac{600}{60}]-[\frac{300}{60}]=5，|A\cap B\cap C|=[\frac{600}{60}]-[\frac{300}{60}]=5，$$

由排容原理可知 $|A\cup B\cup C|=75+50+20-25-10-5+5=110$．

8.設 $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 1\le x\le 540$ 且 x 與 360 互質$\}$，$n(A)=$____________．

解答 144

解析 $\because\ 360=2^3\times 3^2\times 5$，$1\le x\le 540$ 且$(x，360)=1$，

故需在 1 到 540 的正整數中去掉 2 或 3 或 5 的倍數

$n(A)=540-n(A_2\cup A_3\cup A_5)$

$=n(A)=540-(270+180+108-90-54-36+18)=144$．

9.若 $A=\{x\mid x=3k+1，k\in\mathbb{Z}，1\le x\le 200\}$，$B=\{x\mid x=5n+2，n\in\mathbb{Z}，1\le x\le 200\}$，則：

(1) $n(A)=$____________．　(2) $n(A\cap B)=$____________．

解答 (1)67;(2)13

解析 $\because\ 1\le x\le 200$，$x=3k+1$，$k=0，1，2，\cdots，66$，

$A=\{1,4,7,.......,187,190,193,196,199\}$，　$n(A)=67$，

$\because\ 1\le x\le 200$，$x=5n+2$，$n=0，1，2，\cdots，39$，

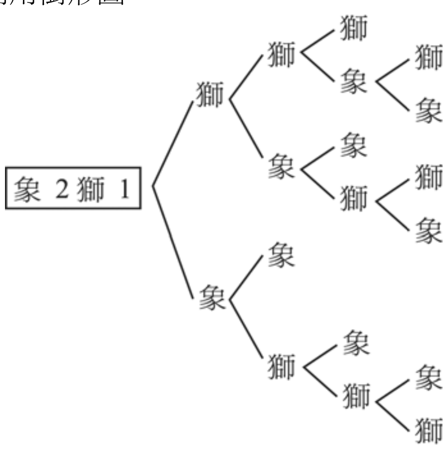
$B=\{2,7,12,.......,187,192,197\}$，　$n(B)=40$，

當 $x\in A\cap B$ 時，$15r+7$，$r\in\mathbb{Z}\Rightarrow\ r=0，1，2，\cdots，12\ \Rightarrow\ n(A\cap B)=13$．

10.職棒四年季後冠軍爭霸戰，是由季內賽前兩名，作七戰四勝的比賽，爭年度總冠軍，現已賽畢三場，兄弟象二勝一敗領先統一獅，則往後的比賽有____________種結果以決定冠軍．

解答 10

解析 利用樹形圖：



從象 2 獅 1 開始，往後比賽的情形共有 10 種．

11.某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅 A，B，C 三題，測驗結果如下：答對 A 者有 51 人，答對 B 者有 36 人，只答對 C 者有 16 人，答對 B，C 兩題者有 13 人，答對 A 或 C 者有 75 人，答對 B 或 C 者有 59 人，而只答對 A，B，C 三題之一者有 66 人，則：

(1)只答對 A 者有____________人．　(2)三題都答錯者有____________人．

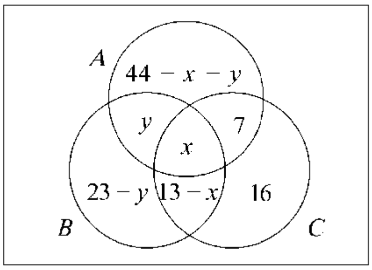
解答 (1)33;(2)8

解析 $|B\cup C|=59$ 且 $|B|=36 \Rightarrow 59=36+16+7$

$$\begin{cases}51+16+(13-x)=75\\(44-x-y)+(23-y)+16=66\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=5\\y=6\end{cases},$$

(1) $44-5-6=33$（人）．

(2) $n(A\cup B\cup C)=92$，∴ $100-92=8$（人）．



12.設 $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|\le 2\}$，$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x+1|\le k\}$，若 $A\subset B$，則 k 的最小值 $=$____________．

解答 4

解析 $x\in A \Rightarrow |x-1|\le 2 \Rightarrow -2\le x-1\le 2 \Rightarrow -1\le x\le 3$，

$x\in B \Rightarrow |x+1|\le k \Rightarrow -k\le x+1\le k \Rightarrow -k-1\le x\le k-1$，

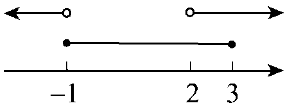
∵ $A\subset B \Rightarrow k-1\ge 3$ 且 $-k-1\le -1 \Rightarrow k\ge 4$ 且 $k\ge 0 \Rightarrow k\ge 4$，

故 k 的最小值 $=4$．

13.若 $A=\{x\,|\,x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+ax+b\le 0\}$，$A\cup B=\mathbb{R}$，$A\cap B=\{x\,|\,2<x\le 3\}$，則數對$(a,b)=$____________．

解答 $(-2,-3)$

解析 $x\in A \Rightarrow x^2-x-2>0 \Rightarrow (x-2)(x+1)>0 \Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$，



∵ $A\cup B=\mathbb{R}$，$A\cap B=(2,3] \Rightarrow B=[-1,3]$

$\Rightarrow (x-3)(x+1)\le 0 \Rightarrow x^2-2x-3\le 0 \Rightarrow a=-2$，$b=-3$．

14.若 $A=\{x,y,z\}$，$B=\{x+1,2,3\}$，且 $A=B$，則(x,y,z)之解共有____________組．

解答 5

解析 ∵ $A=B$ 且 $x\ne x+1 \Rightarrow x=2$ 或 $x=3$，

①若 $x=2$ 時，$A=\{2,y,z\}$，$B=\{3,2,3\}=\{2,3\}$，

∴ $\begin{cases}y=2\\z=3\end{cases}$，$\begin{cases}y=3\\z=2\end{cases}$，$\begin{cases}y=3\\z=3\end{cases}$，有 3 組解．

②若 $x=3$ 時，$A=\{3,y,z\}$，$B=\{4,2,3\}$，

∴ $\begin{cases}y=2\\z=4\end{cases}$，$\begin{cases}y=4\\z=2\end{cases}$，有 2 組解．

由①，②知，共有 5 組解．

15.設 $A=\{(x,\ y)\mid 2x+y=1\}$，$B=\{(y+1,\ x-2)\mid ax+by=1\}$，若 $A=B$，則$(a,\ b)=$______________ .

解答　(1，2)

解析　$A=\{(\alpha,\beta)\mid 2\alpha+\beta=1\}$

設$\begin{cases} y+1=\alpha \\ x-2=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\alpha-1 \\ x=\beta+2 \end{cases}$

$\Rightarrow\ a(\beta+2)+b(\alpha-1)=1 \ \Rightarrow\ b\alpha+a\beta=1-2a+b \ \Leftrightarrow\ 2\alpha+\beta=1$ 相同

$\Rightarrow\ \dfrac{b}{2}=\dfrac{a}{1}=\dfrac{1-2a+b}{1} \ \Rightarrow\ 2a=b，1-2a+b=a$，

$\therefore\ a=1，b=2 \ \Rightarrow\ (a,\ b)=(1,\ 2)$.

16.每次用 20 根相同火柴棒圍成一個三角形，共可圍成____________個不全等的三角形 .

解答　8

解析　設三角形的三邊長 $x，y，z$ 且 $x\ge y\ge z$，$x，y，z\in\mathbb{N}$，則$\begin{cases} x+y+z=20 \cdots\cdots ① \\ y+z>x \quad \cdots\cdots ② \\ x\ge y\ge z \quad \cdots\cdots ③ \end{cases}$，

由①得 $20=x+y+z>x+x=2x \ \Rightarrow\ 10>x$，

由①，③得 $20=x+y+z\le x+x+x=3x \ \Rightarrow\ \dfrac{20}{3}\le x$，

$\because\ x\in\mathbb{N} \ \Rightarrow\ 7\le x<10 \ \Rightarrow\ x=7，8，9$，

當 $x=7$ 時，$y+z=13 \ \Rightarrow\ (y,\ z)=(7,\ 6)$ ，

當 $x=8$ 時，$y+z=12 \ \Rightarrow\ (y,\ z)=(8,\ 4)，(7,\ 5)，(6,\ 6)$ ，

當 $x=9$ 時，$y+z=11 \ \Rightarrow\ (y,\ z)=(9,\ 2)，(8,\ 3)，(7,\ 4)，(6,\ 5)$ ，

$\therefore$ 不全等的三角形共有 $1+3+4=8$ 種 .

17.新新鞋店為與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢…買一送一」的活動；該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	670	670	700	700	700	800	800	800

規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格（例如：買一雙「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一），若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩款鞋，其搭配方法共有____________種 .

解答　21

解析　買 800 元款送 700 元款有 $3\times3=9$ 種，

買 800 元款送 670 元款有 $3\times2=6$ 種，

買 700 元款送 670 元款有 $3\times2=6$ 種，

由加法原理得 $9+6+6=21$（種） .