高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：100.03.16					
範圍	1-1,2 $\sum$ 歸納法	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充、證明題(每題 10 分)

1. 給定數列< $\frac{1}{1}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{1}$，$\frac{4}{2}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\cdots$ >，則 $\frac{3}{10}$ 為數列的第__________項．

解答 76

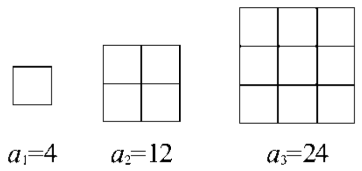
解析 $(\frac{1}{1})$，$(\frac{2}{1}，\frac{1}{2})$，$(\frac{3}{1}，\frac{2}{2}，\frac{1}{3})$，$(\frac{4}{1}，\frac{3}{2}，\frac{2}{3}，\frac{1}{4})$，$(\frac{5}{1}，\frac{4}{2}，\frac{3}{3}，\frac{2}{4}，\frac{1}{5})$，$\cdots$

第 1 群、第 2 群、第 3 群、………，分子分母和分別為 2、3、4、………，依規律得知 $\frac{3}{10}$ 在第 12 群第 10 個分數，故 $\frac{3}{10}$ 為數列的第 $(1+2+3+4+\cdots+11)+10=76$ 項．

2.一個邊長為 n 的大正方形中，共有 n^2 個單位正方形，如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了 a_n 根火柴棒，那麼 $a_{n+1}-a_n=$__________．

解答 $4n+4$

解析



如上圖：當 $n=1$ 時，$a_1=4$；當 $n=2$ 時，$a_2=a_1+4\cdot 2$；當 $n=3$ 時，$a_3=a_2+4\cdot 3$；當 $n=4$ 時，$a_4=a_3+4\cdot 4$，$\cdots$；當 $n=k+1$ 時，$a_{k+1}=a_k+4(k+1)$

故可推得 $a_{n+1}=a_n+4(n+1)$，即 $a_{n+1}-a_n=4n+4$．

3.求 $1+1^2+2+2^2+3+3^2+\cdots+30+30^2$ 之和=__________．

解答 9920

解析 原式 $=(1+2+\cdots+30)+(1^2+2^2+\cdots+30^2)$

$=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 31+\frac{1}{6}\cdot 30\cdot 31\cdot 61=465+9455=9920$．

4.數列 1，2，5，10，17，26，…，依此規則推算，則第 n 項 $a_n=$ ____________．

解答 $1+(n-1)^2$

解析

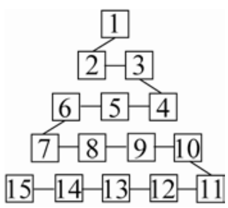
$$
\begin{array}{l}
<a_n>：1，2，5，10，17，26，\cdots，a_{n-1}，a_n，\\
\qquad\quad \vee\ \ \vee\ \ \vee\ \ \vee\ \ \ \vee \qquad\qquad \vee \\
\qquad\quad 1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ \ 9\ \cdots\ \ 2(n-1)-1
\end{array}
$$

$a_n=a_{n-1}+[2(n-1)-1]\Rightarrow$ 依遞迴數列，

$\therefore a_n=1+(1+3+5+\cdots+[2(n-1)-1])$

$=1+\frac{n-1}{2}\times(2\times1+(n-1-1)\times2)=1+(n-1)^2$．

5.如圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：數字 1 出現在第 1

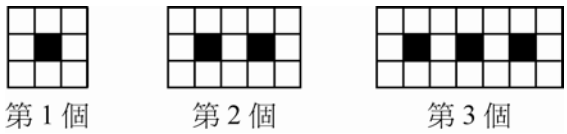


列；數字 2，3 出現在第 2 列；數字 6，5，4（從左至右）出現在第 3 列；數字 7，8，9，10 出現在第 4 列；依此類推．試問第 99 列，從左至右算，第 67 個數字爲____________．

解答 4884

解析 前 99 列共出現了 $1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99\cdot100}{2}=4950$ 個數，第 99 列爲奇數列，可知其數字爲由右而左遞增，則由左向右第 67 個數字 $4950-66=4884$．

6.用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：



拼第 95 個圖需用到____________塊白色地磚．

解答 478

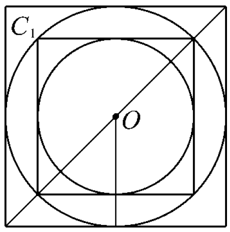
解析 設 a_n 表第 n 個圖所需的白色地磚個數

$\Rightarrow$ $a_1=8$，$a_2=a_1+5$，$a_3=a_2+5=a_1+2\times5$，$\cdots, a_n=a_1+(n-1)\times5$

$\therefore \langle a_n \rangle$爲一等差數列　$\therefore a_{95}=8+94\times5=478$．

7. 將邊長爲 4 的正方形，作其內切圓 C_1，然後作 C_1 的內接正方形，再作其內切圓 C_2，繼續此步驟共得圓 C_1，C_2，$\cdots$，C_6，求這些圓的：(1)周長和=____________．　(2)面積和=____________．

解答 (1)$\dfrac{14+7\sqrt{2}}{2}\pi$;(2)$\dfrac{63}{8}\pi$



解析 最大圓 C_1 的半徑＝最大正方形邊長 $\times\dfrac{1}{2}=2$

又圓 C_1 的內接正方形的對角線＝圓 C_1 的直徑 4

$\Rightarrow$ 第二個正方形的邊長爲 $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ 正方形邊長公比 $\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ 內切圓半徑公比亦爲 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（$\because$正方形爲相似形）

(1)圓 C_1 周長 $2\times\pi\times2=4\pi$，周長公比＝半徑公比＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \text{周長和}=\frac{4\pi[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^6]}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{7\pi}{2-\sqrt{2}}=\frac{14+7\sqrt{2}}{2}\pi\ .$$

(2)圓 C_1 面積＝$\pi\times2^2=4\pi$，面積公比＝(半徑公比)$^2=(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \text{面積和}=\frac{4\pi[1-(\frac{1}{2})^6]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{8}\pi\ .$$

8.利用$\sum$的性質求級數：$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots+(1+2+3+4+\cdots+50)$

=________．

解答 22100

解析 一般項 $a_k=1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

原式 $=\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{50}\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{50}k(k+1)$

$=\dfrac{1}{2}[\dfrac{50\times(50+1)\times(50+2)}{3}]=22100$．（公式：$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$）

9.求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{10}k(2k+1)$ =________．(2) $\sum_{k=1}^{10}(3k-1)^2$ =________．(3) $\sum_{k=1}^{10}(1^2+2^2+\cdots+k^2)$ =________．

解答 (1)825;(2)3145;(3)1210

解析 (1) $\sum_{k=1}^{10}k(2k+1)=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k=2\times\dfrac{10\times11\times21}{6}+\dfrac{10\times11}{2}=770+55=825$．

(2) $\sum_{k=1}^{10}(3k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(9k^2-6k+1)=9\sum_{k=1}^{10}k^2-6\sum_{k=1}^{10}k+10$

$=9\times\dfrac{10\times11\times21}{6}-6\times\dfrac{10\times11}{2}+10=3465-330+10=3145$．

(3) $\sum_{k=1}^{10}(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)=\sum_{k=1}^{10}\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{10}(2k^3+3k^2+k)$

$=\dfrac{1}{6}(2\sum_{k=1}^{10}k^3+3\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k)$

$=\dfrac{1}{6}(2\times\dfrac{10^2\times11^2}{4}+3\times\dfrac{10\times11\times21}{6}+\dfrac{10\times11}{2})$

$=\dfrac{1}{6}(6050+1155+55)=\dfrac{1}{6}\times7260=1210$．

10.試求下列各級數之和：

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+2k+1)$ =__________．(2) $\sum_{k=1}^{10}(2k)^3$ =_________．(求最小 10 個正偶數的立方和.)

解答 (1) $n(n^3+4n^2+5n+3)$； (2)24200

解析 (1) $\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+2k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=4\times[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2+6\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n$

$=n^2(n+1)^2+n(n+1)(2n+1)+n(n+1)+n$

$=n[n(n+1)^2+(n+1)(2n+1)+(n+1)+1]=n(n^3+4n^2+5n+3)$．

(2) $\sum_{k=1}^{10}(2k)^3=2^3\sum_{k=1}^{10}k^3=8\times(\dfrac{10\times11}{2})^2=24200$．

11. 下列各級數之和：

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$ =____________ .　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ =____________ .

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)\,!}$ =____________ .（提示：利用$\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)\,!}=\dfrac{1}{k\,!}-\dfrac{1}{(k+2)\,!}$.）

解答 (1) $\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$;(2) $\dfrac{n}{2n+1}$;(3) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{n+3}{(n+2)!}$

解析 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\times[\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+2)}]$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})]$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}\ .$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}[\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}]$

$$=\frac{1}{2}\cdot[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}\ .$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}=\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+2)!}]$

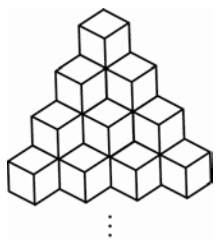
$$=(\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!})+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!})+\cdots+[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}]$$

$$=[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}]=\frac{2+1}{2!}-\frac{(n+2)+1}{(n+2)!}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{(n+2)!}$$

12.如圖是由一堆積木所組成，已知第一層有 1 個，第 2 層有 3 個，第 3 層有 6 個，⋯，依此規則堆成 12 層，試問：

(1)第 k 層的積木個數=____________（用 k 表示）.

(2)全部積木的總個數=____________ .



解答 (1) $\dfrac{k(k+1)}{2}$;(2)364

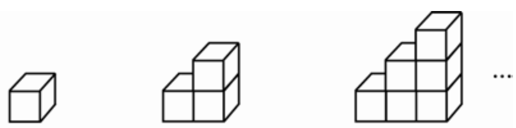
解析 由上而下第一層有 1 個，第 2 層有$1+2$個，第 3 層有$1+2+3$個，⋯，

(1)第 k 層有$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$（個）.

(2) $S_{12}=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+12)$ $\displaystyle=\sum_{k=1}^{12}\frac{k(k+1)}{2}=364$（個）.

13.將同樣大小的正立方體積木堆成一系列的階梯形狀，圖(一)有 1 個積木，圖(二)有 3 個積木，圖(三)有 6 個積木，令 a_n 表示第 n 個圖中的積木總數，

(1)試問 a_{n+1} 與 a_n 的關係=____________ .



(圖一)　(圖二)　(圖三)

(2)試求一般項 $a_n=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答 (1)$a_{n+1}=a_n+(n+1)$;(2)$a_n=\dfrac{n^2+n}{2}$

解析 (1) $a_1=1,\ a_2=a_1+2=1+2,\ a_3=a_2+3=1+2+3,\ \cdots$， 得 $a_{n+1}=a_n+(n+1)$．

(2) $a_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n^2+n}{2}$．

14. 試利用數學歸納法證明：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$，$n\in\mathbb{N}$．

解析 (1) $1^3=1=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$ $\therefore$ $n=1$ 時，命題成立．

(2)設 $n=k$ 時，命題成立，即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$=\dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$\therefore$ $n=k+1$ 時，命題亦成立．

根據數學歸納法 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$，$n\in\mathbb{N}$ 恆成立

15. $n\in\mathbb{N}$，證明：$3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$是 17 的倍數．

解析 (1)當 $n=1$ 時，原式$=3\times5^3+2^4=391=17\times23$ 是 17 的倍數．

(2)設 $n=k$ 時，原式是 17 的倍數，即 $3\times5^{2k+1}+2^{3k+1}=17m$，$m\in\mathbb{N}$

則 $n=k+1$ 時，

原式$=3\times5^{2k+3}+2^{3k+4}=25(3\times5^{2k+1})+8(2^{3k+1})$

$=8(3\times5^{2k+1}+2^{3k+1})+17(3\times5^{2k+1})=17(8m+3\times5^{2k+1})$爲 17 的倍數．

由數學歸納法原理 $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$是 17 的倍數，對所有整數 n 均成立．

16. 設 n 爲正整數，試證：$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$．

解析 (1)當 $n=1$ 時，左式$=1$，右式$=1$ $\therefore$ $n=1$ 時成立．

(2)設 $n=k$ 原式成立，即 $1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1=k^2$成立

則當 $n=k+1$ 時，

$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1$

$=[1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1]+(k+1)+k$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$ 即當 $n=k+1$ 時，原式也成立．

由數學歸納法知 $1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2$對所有整數 n 均成立．

17. n 爲自然數，試證 $10^{2n}+5\times12^n-6$ 都可被 22 整除．

解析 當 $n=1$ 時，$10^2+5\times12-6=154=22\times7$，$\therefore$成立．

設 $n=k$ 時，原式成立，即 $10^{2k}+5\times12^k-6=22\times m$，$m\in\mathbb{N}$．

則 $n = k+1$ 時，$10^{2(k+1)} + 5 \times 12^{k+1} - 6$

$= 100 \times 10^{2k} + 60 \times 12^{k} - 6$

$= 100(10^{2k} + 5 \times 12^{k} - 6) - 440 \times 12^{k} + 594$

$= 100 \times 22m - 22(20 \times 12^{k} - 27)$

$= 22(100m - 20 \times 12^{k} + 27)$ 被 22 整除．

$\therefore$原式亦成立，故由數學歸納法知，對所有整數 n，$10^{2n}+5\times12^{n}-6$ 都可被 22 整除．

18. $n\in\mathbb{N}$，$2^{3n+3}-7n+41$ 恆爲某正整數 P 的倍數，則：

(1)正整數 P 的最大值爲何？ ___________

(2)請以數學歸納法證明之．

解答 (1)49;

解析 (1) 當 $n = 1 \Rightarrow 2^{6}-7+41 = 98 = 7\times14 = 49\times2$，

當 $n = 2 \Rightarrow 2^{9}-14+41 = 539 = 7\times77 = 49\times11$， $\therefore P$ 的最大值爲 49．

(2) 設 $n = k$ 時，$2^{3k+3}-7k+41$ 爲 49 的倍數成立，若 $2^{3k+3}-7k+41 = 49m$， $m\in\mathbb{N}$，

則 $n = k+1$ 時，

$2^{3(k+1)+3}-7(k+1) + 41 = 8 \times 2^{3k+3} - 7k - 7 + 41$

$= 8(2^{3k+3}-7k + 41) + 49k - 294$

$= 8 \times 49m + 49(k - 6) = 49(8m + k - 6)$爲 49 的倍數，

故根據數學歸納法，對所有整數 n，$2^{3n+3}-7n+41$ 恆爲正整數 49 的倍數．

19.(1)猜測不論 n 是任何整數， $2^{8n+1}-2^{4n}$ 的個位數字恆爲多少？$=$___________

(2)用數學歸納法證明你的猜測是正確的．

解答 (1)6;

解析 (1) $n=1$ 代入 $\Rightarrow$ $2^{9}-2^{4}=496$

$n=2$ 代入 $\Rightarrow$ $2^{17}-2^{8}=131072-256=130816$ 故猜測個位數字爲 6．

(2)①當 $n=1$ 時， $2^{9}-2^{4}=496$ 個位數字爲 6 $\therefore n=1$ 時成立．

②若 $n=k$ 時成立，即 $2^{8k+1}-2^{4k}=10m+6$， m 爲正整數

則 $2^{8(k+1)+1}-2^{4(k+1)}=256(2^{8k+1})-16\times2^{4k}$

$=256(10m+6+2^{4k})-16\times2^{4k}$

$=2560m+256\times6+240\times2^{4k}$

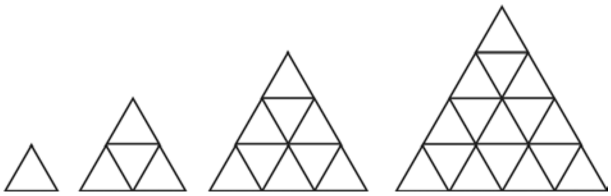
$=10(256m+153+24\times2^{4k})+6$ $\Rightarrow$ 個位數字爲 6, $\therefore n=k+1$ 時成立．

根據數學歸納法 $2^{8n+1}-2^{4n}$ 的個位數字恆爲 6，對所有整數 n 均成立．

20. 圖中有四個排成正三角形的火柴棒組合，使用相同的排列規則，且設每邊有 n 根火柴棒的正三角形之火柴棒總數爲 a_n，請回答以下問題：

(1) a_n 以 n 表示之通式爲____________． (2) $a_{n+1}-a_n=$____________．

(3) $n\in\mathbb{N}$，(1)中的 a_n 試以數學歸納法證明恆成立．



解答 (1) $\frac{3}{2}n(n+1)$;(2) $3(n+1)$;

解析 第 1 圖有 1 個 Δ ，第 2 圖有 $1+2$ 個 Δ ，第 3 圖有 $1+2+3$ 個 Δ ，…………..

(1) $a_1=3\times1$ ， $a_2=3\times(1+2)=9$ ， $a_3=3\times(1+2+3)=18$ ， $a_4=3\times(1+2+3+4)=30$ ，

由恆等式 $a_n=3\times(1+2+3+\ldots\ldots+n)=3\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3}{2}n(n+1)$ ．

(2) $a_{n+1}-a_n=\frac{3}{2}[(n+1)(n+2)-n(n+1)]=3(n+1)$ ．

(3)今證明 $a_n=\frac{3}{2}n(n+1)$ ， $\forall n\in\mathbb{N}$ ，恆成立，

① $n=1$ ， $a_1=\frac{3}{2}(1+1)=3$ ， ∴ $n=1$ 原式成立．

②設 $n=k$ ，原式成立，即 $a_k=\frac{3}{2}k(k+1)$ ，

則 $n=k+1$ 時， $a_{k+1}=a_k+3(k+1)=\frac{3}{2}k(k+1)+3(k+1)$

$$=\frac{3}{2}(k+1)(k+2)=\frac{3}{2}(k+1)[(k+1)+1] ,$$

∴ $n=k+1$ 原式亦成立，由數學歸納法知 $\forall n\in\mathbb{N}$ ， $a_n=\frac{3}{2}n(n+1)$ 恆成立．

21.設 n 是正整數，試利用數學歸納法證明： $n(n+1)(2n+1)$ 恆爲 6 的倍數．

解析 (1)當 $n=1$ 時， $1\times2\times(2+1)=6$ 爲 6 的倍數．

(2)設 $n=k$ 時， $n(n+1)(2n+1)$ 爲 6 的倍數，設 $k(k+1)(2k+1)=6m$ ， m 是正整數，

則 $n=k+1$ 時，

$n(n+1)(2n+1)=(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]=(k+1)(k+2)(2k+3)$

$=(k+1)(2k^2+7k+6)=(k+1)[2k^2+k+(6k+6)]$

$=(k+1)(2k^2+k)+(k+1)(6k+6)=k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2$

$=6m+6(k+1)^2$ 是 6 的倍數，

由數學歸納法知， $n(n+1)(2n+1)$ 爲 6 的倍數，對每一個正整數 n 都成立．