高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：100.03.02					
範圍	1-1,2 數列、級數 B	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（每題 10 分 ）

1.在 4 與 12 之間依序插入 10 個數 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$，使此 12 個數成等差數列，則 $a_8=$__________ .

解答 $\dfrac{108}{11}$

解析 由題意知：等差數列< 4，a_1，a_2，a_3，…，a_{10}，12 >的首項為 4

第 12 項為 12，故由 $a_{12}=a_4+(12-4)d \Rightarrow d=\dfrac{a_{12}-a_4}{12-4}=\dfrac{12-4}{12-1}=\dfrac{8}{11}$

第 9 項 $a_8=4+(9-1)\cdot d=4+8\cdot\dfrac{8}{11}=\dfrac{108}{11}$.

2.等比數列< x，$3x+3$，$4x+4$，⋯ >，求 $x=$__________ .

解答 $-\dfrac{9}{5}$

解析 等比數列 $\dfrac{3x+3}{x}=\dfrac{4x+4}{3x+3}$， $x\neq 0$， -1 $\Rightarrow$ $(3x+3)^2=x(4x+4)$

$\Rightarrow$ $9x^2+18x+9=4x^2+4x$ $\Rightarrow$ $5x^2+14x+9=0$

$\Rightarrow$ $(5x+9)(x+1)=0$ $\Rightarrow$ $x=-\dfrac{9}{5}$ 或 $x=-1$（不合）

3.< a_n >為一數列，已知 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^2+3$，$\forall n\in\mathbb{N}$，則 $a_{10}=$__________ .

解答 19

解析

$$\begin{aligned} \because \quad & S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2+3,\ n\geq 1 \\ -)\ & S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2+3,\ n\geq 2 \\ \hline & S_n-S_{n-1}=a_n=2n-1,\ n\geq 2 \end{aligned}$$

而 $a_{10}=2\times 10-1=19$.

4.設 $a_n=(1+\dfrac{3}{1})\times(1+\dfrac{5}{4})\times(1+\dfrac{7}{9})\times\cdots\times(1+\dfrac{2n+1}{n^2})$， $n\in\mathbb{N}$，則 $a_{94}=$__________ .

解答 9025

解析 $\because$ $a_n=\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{16}{9}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=(n+1)^2$ $\therefore$ $a_{94}=95^2=9025$.

5.設數列< a_n >之首項 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=a_n+n^2$， $n\in\mathbb{N}$，則第 n 項 $a_n=$____________ .

解答 $\dfrac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

解析 由 $a_n=a_{n-1}+(n-1)^2$，

$a_2=a_1+1^2$

$a_3=a_2+2^2$

$a_4 = a_3 \quad + \quad 3^2$

$\vdots$

$+)\ a_n = a_{n-1} + (n-1)^2$

$\therefore\ a_n = a_1 + [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]$

$= 1 + \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \dfrac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6)$.

6.有一數列$<a_n>$，滿足$a_1 = 2$， $a_{n+1} = 3a_n - 2$， $n \in \mathbb{N}$，則

(1)若$a_n + x = 3(a_{n-1} + x)$，求$x =$________； (2)$a_n =$________（請以n表示之）.

解答 (1)$x = -1$； (2)$3^{n+1} - 1$

解析 $a_n = 3a_{n-1} - 2$，設$a_n + x = 3(a_{n-1} + x) \Rightarrow a_n = 3a_{n-1} + 2x \Rightarrow x = -1$

$\therefore\ (a_{n+1} - 1) = 3(a_n - 1)$

$\therefore\ (a_2 - 1) = 3(a_1 - 1)$

$(a_3 - 1) = 3(a_2 - 1)$

$(a_4 - 1) = 3(a_3 - 1)$

$\vdots$

$\times)\ (a_n - 1) = 3(a_{n-1} - 1)$

$a_n - 1 = 3^{n-1}(a_1 - 1) = 3^{n-1} \times 1$， $\therefore\ a_n = 3^{n-1} + 1$.

7.請寫出等比數列5，$\dfrac{5}{3}$，$\dfrac{5}{9}$，$\dfrac{5}{27}$，…的一般項$a_n =$________.

解答 $a_n = 5 \times (\dfrac{1}{3})^{n-1}$， $n \in \mathbb{N}$

解析 等比數列$a_1 = 5$, $r = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$一般項$a_n = a_1 r^{n-1} = 5 \times (\dfrac{1}{3})^{n-1}$ $n \in \mathbb{N}$.

8.數列1，3，7，15，31，63，…，依此規則推算，則第n項$a_n =$________.

解答 $2^n - 1$

解析

$<a_n>$：1，3，7，15，31，63，…，a_{n-1}，a_n，

∨ ∨ ∨ ∨ ∨ … ∨

2　4　8　16　32　…　2^{n-1}

$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} \Rightarrow \quad a_n = 1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1}) = 1 + \dfrac{2 \times (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$.

9.兩等差數列的第n項比為$(2n+3):(3n+4)$，求此兩數列首9項和之比=________.

解答 13：19

解析 設此兩數列$<a_n>$，$<b_n>$之首項為a，b，公差為d，d'

則首9項和之比$\dfrac{S_9}{S'_9} = \dfrac{\frac{9}{2}[2a + (9-1)d]}{\frac{9}{2}[2b + (9-1)d']} = \dfrac{2a + 8d}{2b + 8d'} = \dfrac{a + 4d}{b + 4d'} = \dfrac{a_5}{b_5} = \dfrac{2 \times 5 + 3}{3 \times 5 + 4} = \dfrac{13}{19}$.

10.一等差數列之首 n 項和 $S_n=9$，首 $2n$ 項和 $S_{2n}=12$，求首 $3n$ 項和 $S_{3n}=$____________.

解答 9

解析 一等差數列之首 n 項和 S_n，次 n 項和 ,再次 n 項和………亦成等差

即 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n-2n}$ 成等差．

設 $S_{3n}=x \Rightarrow 9, 12-9, x-12$ 成等差 $2(12-9)=9+(x-12) \Rightarrow x=9$

11.求 $1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)+\cdots+(1+2+\cdots+19+20+19+\cdots+2+1)=$________.

解答 2870

解析 公式 $1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots\cdots 2+1=n^2$

原式 $=1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2=\frac{1}{6}\times 20\times 21\times 41=2870$．

12.某巨蛋球場 E 區共有 23 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位．小明坐第 12 排，發現此排共有 60 個座位，則此球場 E 區共有____________個座位．

解答 1380

解析 所求 $=\frac{23}{2}(a_1+a_{23})=\frac{23}{2}(2a_{12})=23a_{12}=23\times 60=1380$ ．

13.使等比數列 $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \cdots$ 的前 n 項和 S_n 大於 200 的最小整數 $n=$________．

解答 8

解析 $S_n=\dfrac{\frac{1}{9}(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{18}(3^n-1)>200$，則 $3^n-1>3600 \Rightarrow 3^n>3601$，得 $n\ge 8$，

故 n 的最小值為 8．

14.有一球從 81 公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的 $\frac{1}{3}$ 再落下，當它第五次著地時，共經過__________公尺．

解答 161

解析 球最先落下經過 81 公尺，因每次反彈的高度為前高度的 $\frac{1}{3}$

第一次著地所經過的距離為 81 公尺

第二次著地所經過的距離為 $2\times 81\times\frac{1}{3}$ 公尺

第三次著地所經過的距離為 $2\times 81\times(\frac{1}{3})^2$ 公尺

第四次著地所經過的距離為 $2\times 81\times(\frac{1}{3})^3$ 公尺

第五次著地所經過的距離為 $2\times 81\times(\frac{1}{3})^4$ 公尺

所求距離和 $=81+2\times 81\times\frac{1}{3}+2\times 81\times(\frac{1}{3})^2+2\times 81\times(\frac{1}{3})^3+2\times 81\times(\frac{1}{3})^4$

$=81+162\,[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^4]=81+162\times\frac{40}{81}=81+80=161$ ．

15.試求下列各級數和：

(1) $\sum_{k=1}^{10}(5k-3)$ = ____________ .　(2) $\sum_{k=1}^{n}(5k-3)$ = ____________ .

(3) $\sum_{k=1}^{10}5(-\frac{1}{2})^{k-1}$ = ____________ .　(4) $\sum_{k=1}^{n}5(-\frac{1}{2})^{k-1}$ = ____________ .

解答 (1)245;(2) $\frac{5n^2-n}{2}$;(3) $\frac{1705}{512}$;(4) $\frac{10}{3}-\frac{10}{3}(-\frac{1}{2})^n$

解析 (1) $\sum_{k=1}^{10}(5k-3)=\sum_{k=1}^{10}5k-\sum_{k=1}^{10}3=5\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3 \quad =5\times\frac{10\times(10+1)}{2}-10\times3=245$.

(2) $\sum_{k=1}^{n}(5k-3)=\sum_{k=1}^{n}5k-\sum_{k=1}^{n}3=5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3 \quad =5\times\frac{n(n+1)}{2}-3n=\frac{5n^2+5n-6n}{2}=\frac{5n^2-n}{2}$.

(3) $\sum_{k=1}^{10}5(-\frac{1}{2})^{k-1}=5\sum_{k=1}^{10}(-\frac{1}{2})^{k-1} \quad =5[(-\frac{1}{2})^0+(-\frac{1}{2})^1+(-\frac{1}{2})^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^9]$

$$=5\times\frac{(-\frac{1}{2})^0[1-(-\frac{1}{2})^{10}]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1705}{512}$$.

(4) $\sum_{k=1}^{n}5(-\frac{1}{2})^{k-1}=5\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-1} \quad =5[(-\frac{1}{2})^0+(-\frac{1}{2})^1+(-\frac{1}{2})^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-1}]$

$$=5\times\frac{(-\frac{1}{2})^0[1-(-\frac{1}{2})^{n}]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}(-\frac{1}{2})^n$$.

16.若 $\sum_{k=2}^{4}(ak+b)=93$ ， $\sum_{k=0}^{3}(ak+b)=70$ ，求：(1) $a=$ ____________ .　(2) $b=$ ____________ .

解答 (1)9;(2)4

解析 $\sum_{k=2}^{4}(ak+b)=93 \;\Rightarrow\; (2a+b)+(3a+b)+(4a+b)=93 \;\Rightarrow\; 3a+b=31$ ……①

$\sum_{k=0}^{3}(ak+b)=70 \;\Rightarrow\; b+(a+b)+(2a+b)+(3a+b)=70 \;\Rightarrow\; 3a+2b=35$ ……②

$\Rightarrow\; a=9$ ， $b=4$.

17.求下列各小題：

(1) $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+50)=$ ____________ .

(2) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{50\times51}=$ ____________ .

(3) $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+50}=$ ____________ .

解答 (1)22100;(2) $\frac{50}{51}$;(3) $\frac{100}{51}$

解析 (1)第 k 項 $a_k=1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

$$\therefore 所求=\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{50}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{50}(k^2+k)=\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{50}k^2+\sum_{k=1}^{50}k)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{50\times51\times101}{6}+\frac{50\times51}{2})=22100\ .$$

(2) $$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{50\times51}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{50}-\frac{1}{51})$$

$$=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}\ .$$

(3)第 k 項 $a_k=\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\dfrac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\dfrac{2}{k(k+1)}$

$$\therefore 所求=\sum_{k=1}^{50}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=2(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{50\times51})=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{50}-\frac{1}{51})$$

$$=2(1-\frac{1}{51})=\frac{100}{51}\ .$$

18.求下列各小題：

(1) $1\times99+2\times98+3\times97+\cdots+97\times3+98\times2+99\times1=$ ____________ .

(2) $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\dfrac{1}{99\times100\times101}=$ ____________ .

解答 (1)166650;(2) $\dfrac{5049}{20200}$

解析 (1)原式 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{99}k\times(100-k)$

$$=\sum_{k=1}^{99}(100k-k^2)=\sum_{k=1}^{99}100k-\sum_{k=1}^{99}k^2=100\sum_{k=1}^{99}k-\sum_{k=1}^{99}k^2$$

$$=100\times\frac{99\times100}{2}-\frac{99\times100\times199}{6}=166650\ .$$

(2)原式 $=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{1}{1\times2}-\dfrac{1}{2\times3})+(\dfrac{1}{2\times3}-\dfrac{1}{3\times4})+(\dfrac{1}{3\times4}-\dfrac{1}{4\times5})+\cdots+(\dfrac{1}{99\times100}-\dfrac{1}{100\times101})]$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{10100}]=\frac{5049}{20200}\ .$$

19.計算 $\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3})+(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{100}+\dfrac{2}{100}+\dfrac{3}{100}+\cdots+\dfrac{99}{100})$ 之值為__________ .

解答 2475

解析 $\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3})+(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{100}+\dfrac{2}{100}+\dfrac{3}{100}+\cdots+\dfrac{99}{100})$

$$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1+2+\cdots+k}{k+1}=\sum_{k=1}^{99}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k+1}=\sum_{k=1}^{99}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{99\times100}{2}=2475\ .$$

20.設 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$，則滿足$|S_n-\frac{1}{2}|<0.01$ 之最小自然數 $n=$__________ .

解答 25

解析 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$

$$=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\ \cdots\ +(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$$

而 $|S_n-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{100}\ \Rightarrow\ 2n+1>50$，得 $n>24$，故最小自然數 $n=25$.

21.求：(1) $\sum_{k=5}^{10}k^2=$____________ . (2) $\sum_{k=5}^{10}k^3=$____________ .

解答 (1)355;(2)2925

解析 (1) $\sum_{k=5}^{10}k^2=5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$

$$=(1^2+2^2+\cdots+4^2+5^2+\cdots+10^2)-(1^2+2^2+\cdots+4^2)$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{4\times5\times9}{6}\quad=355\ .$$

(2) $\sum_{k=5}^{10}k^3=5^3+6^3+\cdots+10^3\quad=(1^3+2^3+\cdots+10^3)-(1^3+2^3+\cdots+4^3)$

$$=(\frac{10\times11}{2})^2-(\frac{4\times5}{2})^2=2925\ .$$

22.求：

(1) $2^2+5^2+8^2+\cdots+32^2=$____________ .

(2) $2^2+5^2+8^2+\cdots+(3n-1)^2=$____________ .

解答 (1)4169;(2) $\frac{n}{2}(6n^2+3n-1)$

解析 (1) $2^2+5^2+8^2+\cdots+32^2=\sum_{k=1}^{11}(3k-1)^2\quad=\sum_{k=1}^{11}(9k^2-6k+1)$

$$=\sum_{k=1}^{11}9k^2-\sum_{k=1}^{11}6k+\sum_{k=1}^{11}1\quad=9\sum_{k=1}^{11}k^2-6\sum_{k=1}^{11}k+\sum_{k=1}^{11}1$$

$$=9\times\frac{11\times12\times23}{6}-6\times\frac{11\times12}{2}+11\quad=4169\ .$$

(2) $2^2+5^2+8^2+\cdots+(3n-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(9k^2-6k+1)$

$$=9\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=9\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-6\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{n}{2}(6n^2+3n-1)\ .$$

23.級數和$\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ ＝____________．

解答 $\frac{6n}{n+1}$

解析 原式$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

$=6[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=6(1-\frac{1}{n+1})=\frac{6n}{n+1}$ ．

24.級數和$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2+2\times3}+\cdots+\frac{1}{1\times2+2\times3+\cdots20\times21}$ ＝____________．

解答 $\frac{115}{154}$

解析 原式 $=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{20}\frac{3}{k(k+1)(k+2)}$

$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{20}(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)})=\frac{3}{2}(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{21\times22})=\frac{115}{154}$ ．

25.求$1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+7\frac{1}{16}+\cdots+19\frac{1}{1024}=$____________．

解答 $100\frac{1023}{1024}$

解析 原式$=(1+3+5+\cdots+19)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1024})$

$=\frac{(1+19)10}{2}+\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^{10}]}{1-\frac{1}{2}}=100+1-\frac{1}{1024}=100\frac{1023}{1024}$ ．

26.求$1\cdot(2)+2\cdot(2+4)+3\cdot(2+4+6)+\cdots+10\cdot(2+4+6+\cdots+20)$之和為____________．

解答 3410

解析 原式$=\sum_{k=1}^{10}k[2(1+2+3+\cdots+k)]=\sum_{k=1}^{10}k[2\times\frac{1}{2}k(k+1)]=\sum_{k=1}^{10}k\cdot k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^3+\sum_{k=1}^{10}k^2=(\frac{1}{2}\times10\times11)^2+\frac{1}{6}\times10\times11\times21=3410$ ．

27.設 $n\in\mathbb{N}$，$S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(2n)^2=$____________．（以 n 來表示）

解答 $-2n^2-n$

解析 $S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$

$=\sum_{k=1}^{n}[(2k-1)^2-(2k)^2]=\sum_{k=1}^{n}(2k-1-2k)(2k-1+2k)$

$=\sum_{k=1}^{n}(-4k+1)=-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=(-4)\times\frac{1}{2}n(n+1)+n=-2n^2-n$.

28.級數$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k^2+2k}$之和為__________ .

解答 $\frac{175}{264}$

解析 $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{9}-\frac{1}{11})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})]$

$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{23}{132})=\frac{1}{2}\cdot\frac{175}{132}=\frac{175}{264}$.