| 高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：100.02.23 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 1-1,2 數列、級數 A | 班級 | 一年____班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、填充題 (每題 10 分 )

1.在 4 與 12 之間依序插入 10 個數 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$, 使此 12 個數成等差數列, 則 $a_7 =$__________ .

解答 $\frac{100}{11}$

解析 由題意知：等差數列$<4，a_1，a_2，a_3，\cdots，a_{10}，12>$的首項爲 4

第 12 項爲 12，故由 $a_{12}=a_4+(12-4)d \Rightarrow d=\frac{a_{12}-a_4}{12-4}=\frac{12-4}{12-1}=\frac{8}{11}$

第 8 項 $a_7 = 4 + (8-1)\cdot d = 4 + 7\cdot\frac{8}{11}=\frac{100}{11}$ .

2.等比數列$<x，3x+3，4x+4，\cdots>$，求第 4 項爲__________（算出其値，不可以 $x$ 表示）.

解答 $-\frac{64}{15}$

解析 等比數列$\frac{3x+3}{x}=\frac{4x+4}{3x+3}$， $x\neq 0$， $-1$ $\Rightarrow$ $(3x+3)^2 = x(4x+4)$

$\Rightarrow$ $9x^2+18x+9=4x^2+4x$ $\Rightarrow$ $5x^2+14x+9=0$

$\Rightarrow$ $(5x+9)(x+1)=0$ $\Rightarrow$ $x=-\frac{9}{5}$ 或 $x=-1$（不合）

$x=-\frac{9}{5}$時，公比 $r=\frac{3\cdot(-\frac{9}{5})+3}{-\frac{9}{5}}=\frac{4}{3}$， $a_4=(-\frac{9}{5})\cdot(\frac{4}{3})^3=(-\frac{9}{5})\cdot(\frac{64}{27})=-\frac{64}{15}$ .

3.$\langle a_n\rangle$爲一數列，已知 $S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^2+3$，$\forall n\in\mathbb{N}$，則 $a_n=$__________ .

解答 $\begin{cases} a_1=4,\ n=1 \\ a_n=2n-1,\ n\geq 2\end{cases}$

解析

$$\begin{aligned} \because\quad & S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2+3，n\geq 1 \\ -)\ & S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2+3，n\geq 2 \\ \hline & S_n-S_{n-1}=a_n=2n-1，n\geq 2 \end{aligned}$$

而 $a_1=S_1=4$ .

4.設 $a$，$b$ 爲整數, 若 $-5$，$a$，$b$，49 前 3 項成等差數列, 後三項成等比數列, 則 $a+b=$____________ .

解答 8

解析 $\begin{cases} a-(-5)=b-a\cdots\cdots① \\ \frac{b}{a}=\frac{49}{b}\cdots\cdots② \end{cases}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{b+(-5)}{2}$ 代入② $\Rightarrow$ $2b^2-49b+245=0$

$\Rightarrow$ $b=7$ 或 $\frac{35}{2}$（不合） $\therefore a=1$ $\therefore a+b=8$ .

5.數列< $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{8}{13}$，⋯ > 依此規則，則 $a_{n+1}$ 與 $a_n$ 的遞迴關係式爲__________．

解答 $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$

解析 $a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{2}{3}=\frac{2}{1+2}=\frac{1}{\frac{1+2}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{1+a_1},$

$$a_3=\frac{3}{5}=\frac{3}{2+3}=\frac{1}{\frac{2+3}{3}}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{1+a_2},\ \cdots\Rightarrow\ a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}\ .$$

6.設 $a_n=(1+\frac{3}{1})\times(1+\frac{5}{4})\times(1+\frac{7}{9})\times\ \cdots\ \times(1+\frac{2n+1}{n^2})$，$n\in\mathbb{N}$，則 $a_{95}=$__________．

解答 9216

解析 $\because\ a_n=\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}=(n+1)^2\quad\therefore\ a_{95}=96^2=9216$ .

7.設數列< $a_n$ >之首項 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=a_n+n^2+1$，$n\in\mathbb{N}$，則第 $n$ 項 $a_n=$____________．

解答 $\frac{1}{6}n(2n^2-3n+7)$

解析 由 $a_n=a_{n-1}+(n-1)^2+1$，

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+1^2+1\\ & a_3=a_2+2^2+1\\ & a_4=a_3+3^2+1\\ & \vdots\\ +) & a_n=a_{n-1}+(n-1)^2+1\\ \hline \end{array}$$

$$\therefore\ a_n=a_1+[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]+(n-1)$$

$$=1+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+(n-1)=\frac{1}{6}n(2n^2-3n+7)\ .$$

8.有一數列< $a_n$ >，滿足 $a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+1$，$n\in\mathbb{N}$，則 $a_n=$____________（請以 $n$ 表示之）．

解答 $\frac{5\times3^{n-1}-1}{2}$

解析 $a_n=3a_{n-1}+1$，設 $a_n+x=3(a_{n-1}+x)\Rightarrow a_n=3a_{n-1}+2x\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ a_{n+1}+\frac{1}{2}=3(a_n+\frac{1}{2})$$

$$\therefore\ (a_2+\frac{1}{2})=3(a_1+\frac{1}{2})$$

$$(a_3+\frac{1}{2})=3(a_2+\frac{1}{2})$$

$$(a_4+\frac{1}{2})=3(a_3+\frac{1}{2})$$

$$\vdots$$

$$\times)\ (a_n+\frac{1}{2})=3(a_{n-1}+\frac{1}{2})$$

$a_n+\frac{1}{2}=3^{n-1}(a_1+\frac{1}{2})=3^{n-1}\times\frac{5}{2}$， $\therefore\quad a_n=\dfrac{5\times 3^{n-1}-1}{2}$ .

9.數列< $a_n$ >，若 $a_1=2$， $a_{n+1}=a_n+n^2$， $n\in\mathbb{N}$，則 $a_{10}=$____________ .

解答 287

解析

$$\left.\begin{array}{ll} n=1\text{代入} & \Rightarrow\quad a_2=a_1+1^2\\ n=2\text{代入} & \Rightarrow\quad a_3=a_2+2^2\\ n=3\text{代入} & \Rightarrow\quad a_4=a_3+3^2\\ \quad\vdots & \\ n=9\text{代入} & \Rightarrow\quad a_{10}=a_9+9^2 \end{array}\right\}\text{相加}$$

$\Rightarrow\quad \cancel{a_2}+\cancel{a_3}+\cancel{\cdots}+\cancel{a_9}+a_{10}=a_1+\cancel{a_2}+\cancel{\cdots}+\cancel{a_9}+1^2+2^2+\cdots+9^2$，

$\therefore\quad a_{10}=a_1+(1^2+2^2+\cdots+9^2)=2+\dfrac{9\cdot 10\cdot 19}{6}=287$ .

10.請分別用下列兩個方式來描述等差數列 1， $-3$， $-7$，⋯：

(1)數列的遞迴關係為____________ . (2)數列的一般項為____________ .

解答 (1) $a_1=1$， $a_n=a_{n-1}-4$， $n\geq 2$;(2) $a_n=-4n+5$， $n\in\mathbb{N}$

解析 $a_1=1$

$a_2=1-4=a_1-4$

$a_3=-3-4=a_2-4$

$\vdots$

$+)\ a_n=a_{n-1}-4$

$a_n=1-4(n-1)=-4n+5$

$\therefore$ (1)遞迴關係為 $a_1=1$， $a_n=a_{n-1}-4$， $n\geq 2$ .

(2)一般項為 $a_n=-4n+5$， $n\in\mathbb{N}$ .

11.請寫出等比數列 $5,\frac{5}{3},\frac{5}{9},\frac{5}{27},\cdots$的：(1)遞迴關係為____________. (2)一般項____________.

解答 (1) $a_1=5$， $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}$， $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$; (2) $a_n=5\times(\frac{1}{3})^{n-1}$， $n\in\mathbb{N}$

解析 $a_1=5$

$$a_2=\frac{5}{3}=\frac{a_1}{3}$$

$$a_3=\frac{5}{9}=\frac{\frac{5}{3}}{3}=\frac{a_2}{3}$$

$$\vdots$$

$\times) a_n = \dfrac{a_{n-1}}{3}$

$$a_n = 5\times(\frac{1}{3})^{n-1}$$

$\therefore$ (1)遞迴關係：$a_1 = 5$，$a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1}$，$n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ .

(2)一般項：$a_n = 5\times(\dfrac{1}{3})^{n-1}$，$n \in \mathbb{N}$ .

12.數列 1，3，7，15，31，63，⋯，依此規則推算，則第 $n$ 項 $a_n =$ ____________ .

解答 $2^n-1$

解析

$<a_n>$：1，3，7，15，31，63，⋯，$a_{n-1}$，$a_n$，

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$

2 4 8 16 32 ⋯ $2^{n-1}$

$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1}) = 1 + \frac{2\times(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 1 .$$

13.設 $a_1$，$a_2$，⋯，$a_{50}$ 是從 $-1$，0，1 這三個整數中取值的數列．若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 9$ 且

$(a_1+1)^2 + (a_2+1)^2 + \cdots + (a_{50}+1)^2 = 107$，則 $a_1$，$a_2$，⋯，$a_{50}$ 當中有____________項是 0 .

解答 11

解析 設 1 有 $x$ 個，$-1$ 有 $y$ 個，0 有 $50-x-y$ 個，

則 $\begin{cases} 1\cdot x + (-1)\cdot y + 0\cdot(50-x-y) = 9 \\ 4\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot(50-x-y) = 107 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=9 \\ 3x-y=57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=15 \end{cases} \Rightarrow$ 0 有個 $50-24-15=11$ .

14.若數列〈$a_n$〉，$a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} - a_n = 4n-3$，則 $a_{20}$ 之值爲____________ .

解答 704

解析 $a_{20} = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{20} - a_{19}) = 1 + 1 + 5 + 9 + \cdots + 73$

$= 1 + \dfrac{1+73}{2}\times 19 = 704$ .

15.若等比數列$\langle a_n \rangle$的第 4 項爲 6，第 6 項爲 24，而且數列的每一項都是正數，求這個數列的前 10 項總和爲__________ .

解答 $\dfrac{3069}{4}$

解析 設公比爲 $r$（$r>0$），首項爲 $a_1$（$a_1>0$）

$\begin{cases} 6 = a_1 r^3 & \cdots\cdots① \\ 24 = a_1 r^5 & \cdots\cdots② \end{cases}$

$\dfrac{②}{①} \Rightarrow r^2 = 4$，得 $r = 2$，$-2$（不合）

$r=2$ 代入①，得 $a_1=\frac{3}{4}$，所求$=\dfrac{\frac{3}{4}(2^{10}-1)}{2-1}=\dfrac{3069}{4}$ .

16.設 $n\in\mathbb{N}$，且 $200<n<300$，則被 9 除餘 2 的所有 $n$ 之總和爲__________ .

解答 2794

解析 設 $n=9k+2$，$k\in\mathbb{Z}$

$200<n<300 \quad\Rightarrow\quad 200<9k+2<300 \quad\Rightarrow\quad 198<9k<298 \quad\Rightarrow\quad 22<k<33.\cdots$

$\therefore\quad k=23$，$24$，$\cdots$，$33$ 共 $33-23+1=11$ 項

$(9\times23+2)+(9\times24+2)+(9\times25+2)+\cdots\cdots+(9\times33+2)$

$=9\times(23+24+25+\cdots+33)+2\times11$

$=9\times\dfrac{11\times(23+33)}{2}+2\times11=2772+22=2794$ .

17.設一等差複數數列的首項是 $2+45i$，公差是 $1-3i$，若此數列的首 $n$ 項和爲 $S_n$，則使 $S_n$ 爲實數的正整數 $n=$__________ .

解答 31

解析 首 $n$ 項和爲

$$S_n=\frac{n}{2}[2\cdot(2+45i)+(n-1)(1-3i)]=\frac{n}{2}[(n+3)+(93-3n)i]=\frac{1}{2}n(n+3)+\frac{1}{2}n(93-3n)i$$

$S_n$ 爲實數，虛部 $\frac{1}{2}n(93-3n)=0$，因爲 $n$ 爲自然數，故取 $n=31$ .

18.兩等差數列的第 $n$ 項比爲 $(2n+3):(6n+4)$，求此兩數列首 11 項和之比 = ____________ .

解答 3：8

解析 設此兩數列 $<a_n>$，$<b_n>$ 之首項爲 $a$，$b$，公差爲 $d$，$d'$

則首 11 項和之比 $\dfrac{S_{11}}{S'_{11}}=\dfrac{\frac{11}{2}[2a+(11-1)d]}{\frac{11}{2}[2b+(11-1)d']}=\dfrac{2a+10d}{2b+10d'}=\dfrac{a+5d}{b+5d'}=\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{2\times6+3}{6\times6+4}=\dfrac{3}{8}$ .

19.一等比數列之首 $n$ 項和 $S_n=9$，首 $2n$ 項和 $S_{2n}=12$，求首 $3n$ 項和 $S_{3n}=$____________ .

解答 13

解析 一等比數列之首 $n$ 項和 $S_n$，次 $n$ 項和，再次 $n$ 項和………亦成等比

即 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n-2n}$ 成等比 .

設 $S_{3n}=x\Rightarrow 9,12-9,x-12$ 成等比 $\dfrac{3}{9}=\dfrac{x-12}{3}\Rightarrow 3x-36=3,x=13$

20.數列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\cdots$，依此規則繼續下去，則：

(1) $\frac{7}{11}$ 爲第__________項 .　　(2)此數列的第 1 項到 $\frac{7}{11}$ 這一項的總和爲__________ .

解答 (1)62;(2) $\frac{771}{22}$

解析 首先將數列分群如下：$(\frac{1}{1})$，$(\frac{1}{2}，\frac{2}{2})$，$(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}，\frac{3}{3})$，$(\frac{1}{4}，\frac{2}{4}，\frac{3}{4}，\frac{4}{4})$，$\cdots$

由觀察得知：第 $k$ 群共有 $k$ 個數，每個數的分母均爲 $k$，故知 $\frac{7}{11}$ 在第 11 群的第 7 個數，

所以 $\frac{7}{11}$ 的項數爲 $(1+2+\cdots+10)+7=62$ 項，其次，考慮第 1 項到 $\frac{7}{11}$ 這一項的總和爲

$$(\frac{1}{1})+(\frac{1}{2}+\frac{2}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3})+\cdots+(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{10}{10})+(\frac{1}{11}+\cdots+\frac{7}{11})$$

$$=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+\cdots+\frac{1}{10}(1+2+3+\cdots+10)\ +\frac{1}{11}(1+2+\cdots+7)$$

$$=\frac{65}{2}+\frac{28}{11}=\frac{771}{22}\ .$$

21.介於 $2^{10}$ 與 $2^{11}$ 之間的自然數中，所有 9 的倍數的總和爲____________ .

解答　174933

解析　當數字總和爲 9 的倍數時，則其爲 9 的倍數，

$\because 2^{10}=1024$，$\therefore$數字和爲 $7\Rightarrow 2^{10}+2=1026$ 爲首項，

$\because 2^{11}=2048$，$\therefore$數字和爲 $14\Rightarrow 2^{11}-5=2043$ 爲末項

$\Rightarrow 2043=1026+(n-1)\times 9$，$\therefore n=114$，即共有 114 項

$\Rightarrow$ 所求 $=\frac{114}{2}\times(1026+2043)=174933$ .

22.求 $1+(1+2+1)+(1+2+3+2+1)+\cdots+(1+2+\cdots+29+30+29+\cdots+2+1)=$ __________ .

解答　9455

解析　公式 $1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots\cdots 2+1=n^2$

原式 $=1^2+2^2+3^2+\cdots+30^2=\frac{1}{6}\times 30\times 31\times 61=9455$ .

23.某巨蛋球場 $E$ 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位．小明坐在正中間那一排（即第 13 排），發現此排共有 64 個座位，則此球場 $E$ 區共有____________個座位．

解答　1600

解析　所求 $=\frac{25}{2}(a_1+a_{25})=\frac{25}{2}(2a_{13})=25a_{13}=25\times 64=1600$ .

24.一個劇場設置了 20 排座位，第一排有 38 個座位，往後每一排都比前一排多 2 個座位，則這個劇場總共設置了________個座位．

解答　1140

解析　首項 38，公差 2，前 20 項和 $S_{20}=\frac{20[2\times 38+(20-1)\times 2]}{2}=1140$，共 1140 個座位．

25.設 $<a_n>$ 爲等差數列，已知首項 $a_1=75$，公差爲 $-7$，若首 $n$ 項和最大，則 $n=$ ________ .

解答　11

解析　當 $a_n\geq 0$ 時，和會增加，又 $a_n=75+(n-1)(-7)=-7n+82\geq 0$，

則 $n\leq\frac{82}{7}$，故取 $n=11$ .

26.使等比數列 $\frac{1}{9},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \cdots$ 的前 $n$ 項和 $S_n$ 大於 100 的最小整數 $n=$ ________ .

解答 7

解析 $S_n=\dfrac{\frac{1}{9}(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{1}{18}(3^n-1)>100$，則 $3^n-1>1800\Rightarrow 3^n>1801$，得 $n\geq 7$，

故 $n$ 的最小値爲 7．

27.設數列〈 $a_n$ 〉滿足 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+(-2)^{n-1} \end{cases}$， $n\in\mathbb{N}$，求一般項 $a_n$ 爲______________．

解答 $\dfrac{4-(-2)^{n-1}}{3}$， $n\in\mathbb{N}$

解析 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1}=1+\dfrac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}=\dfrac{4-(-2)^{n-1}}{3}$，

$\therefore a_n=\dfrac{4-(-2)^{n-1}}{3}$， $n\in\mathbb{N}$ ．