高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：100.01.14
範圍	3-4、5 對數不等式 對數應用	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（每題 10 分）

1.設 a 是一個正實數，已知 $\log a$ 的首數是 -1，尾數是 0.5，則 a 的值為____________ .

解答 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

解析 $\log a=-1+0.5=-0.5=-\dfrac{1}{2}$，故 $a=10^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{10^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

2.附常用對數表一小段：由下表得 $\log(51.67)^{-28}\approx$ ____________ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152

解答 -47.9696

解析 $\log(51.67)^{-28}=-28\log 51.67=-28(1+\log 5.167)$

由查表及內差法知 $\log 5.167\approx 0.7126+0.0006=0.7132$

$\therefore$ 原式 $\approx -28(1+0.7132)=-47.9696$

3.已知 47^{100} 為 168 位數，則 47^{23} 為____________位數 .

解答 39

解析 47^{100} 為 168 位數 $\Rightarrow \log 47^{100}$ 的首數$=167$，$\log 47^{100}=167+0.\sim$ $\therefore 167\le \log 47^{100}<168$

$\Rightarrow 1.67\le \log 47<1.68$，$\log 47^{23}=23\log 47\Rightarrow 1.67\times 23\le \log 47^{23}<1.68\times 23$

$\Rightarrow 38.41\le \log 47^{23}<38.64\Rightarrow \log 47^{23}=38.\sim=38+0.\sim \Rightarrow 47^{23}$ 為 39 位數

4.已知 $\log 2.34\approx 0.3692$，$\log 2.35\approx 0.3711$，則

(1) $\log 234.7\approx$ ____________ .　(2)若 $\log x\approx -2.6302$，則 $x\approx$ ____________ .

解答 (1) 2.3705;(2) 0.002343

解析 (1) $\log 234.7=2+\log 2.347$，

由查表及內差法知 $\log 2.347=0.3692+0.0013=0.3705$

(2) $\log x=-2.6302=-3+0.3698$

設 $\log t=0.3698$，由查表及內差法知 $t=2.343$

$\Rightarrow \log x=-3+0.3698=-3+\log 2.343\Rightarrow x=0.002343$

5.$\log 2\approx 0.3010$，$n\in\boldsymbol{N}$，$400<(\dfrac{5}{4})^n<500$，則 $n=$ ____________ .

解答 27

解析 $400<(\dfrac{5}{4})^n<500\Rightarrow \log 400<\log(\dfrac{10}{8})^n<\log 500$

$\Rightarrow 2+2\log 2<n[\log 10-3\log 2]<2+\log 5$

$\Rightarrow 2.6020<0.097n<2.6990\Rightarrow 26.8<n<27.8\Rightarrow n=27$

6.純小數 $(\dfrac{1}{6})^n$ 於小數點後第 15 位才開始出現不為 0 的數字，則正整數 n 之值= ____________ .

解答 18 或 19

解析　$(\frac{1}{6})^n$ 於小數點後第 15 位開始出現不為 0 的數字 $\Rightarrow \log(\frac{1}{6})^n$ 的首數 $=-15$

$\Rightarrow \log(\frac{1}{6})^n = -15 + 0.\sim = -14.\sim$ ∴ $-15 \le \log(\frac{1}{6})^n < -14$

$\Rightarrow -15 \le n(0 - 0.3010 - 0.4771) < -14 \Rightarrow \frac{14}{0.7781} < n \le \frac{15}{0.7781}$

$\Rightarrow 17.99 < n \le 19.28$　∴ $n = 18$ 或 19（∵ $n \in \boldsymbol{N}$）

7.設 a，$b \in \boldsymbol{N}$，a^{50} 為 25 位數，$(\frac{1}{b})^{25}$ 為純小數，且小數點後第 50 位始出現不為 0 之有效數字，則 $(ab)^{10}$ 為__________位之整數．

解答　25

解析　$\begin{cases} 24 \le \log a^{50} < 25 \\ -50 \le \log(\frac{1}{b})^{25} < -49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24 \le 5\log a^{10} < 25 \\ -50 \le -\frac{5}{2}\log b^{10} < -49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4.8 \le \log a^{10} < 5 \\ 19.6 < \log b^{10} \le 20 \end{cases}$

二式相加 $24.4 \le \log a^{10} + \log b^{10} < 25 \Rightarrow 24.4 < \log(ab)^{10} < 25$

8.已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，$\log 7 \approx 0.8451$，求

(1) 2^{26} 為①__________位數，首位數字為②__________．

(2) 3^{16} 為①__________位數，首位數字為②__________．

(3) $2^{26} + 3^{16}$ 為__________位數．

解答　(1)①8②6;(2) ①8②4;(3) 9

解析　(1) $\log 2^{26} = 26\log 2 \approx 26 \times 0.3010 = 7.826$，首數 $7 \Rightarrow 8$ 位數．

尾數 0.826 在 $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0.7781$ 與 $\log 7 \approx 0.8451$ 之間 $\Rightarrow$ 首位數字為 6．

(2) $\log 3^{16} = 16\log 3 \approx 16 \times 0.4771 = 7.6336$，首數 $7 \Rightarrow 8$ 位數．

尾數 0.6336 在 $\log 4 = 2\log 2 \approx 0.6020$ 與 $\log 5 = 1 - \log 2 \approx 0.6990$ 間 $\Rightarrow$ 首位數字為 4．

(3)由(1)(2)得知 2^{26} 及 3^{16} 皆為 8 位數，又首位數字分別為 6 及 4，故相加後必進位，

故 $2^{26} + 3^{16}$ 為 9 位數．

9.已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，設 $n \in \boldsymbol{N}$，則使得 $(\frac{9}{8})^n$ 的整數部分為 3 位數的 n 共有________個．

解答　19

解析　∵ $(\frac{9}{8})^n$ 之整數部分為 3 位數即首數 2，$\log(\frac{9}{8})^n = 2 + 0.\sim$

∴ $2 \le \log(\frac{9}{8})^n < 3 \Rightarrow 2 \le n(2\log 3 - 3\log 2) < 3 \Rightarrow 2 \le n \times 0.0512 < 3$

$\Rightarrow \frac{2}{0.0512} \le n < \frac{3}{0.0512}$，即 $39.\sim \le n < 58.\sim$，$n \in \boldsymbol{N}$，取 $n = 40$，41，……，58，共 19 個

10.已知 $\log_{10}2 \approx 0.3010$，$\log_{10}3 \approx 0.4771$，若將 $\frac{1}{2^{27}} + \frac{1}{3^{17}}$ 表為小數時，則小數點之後第__________位才開始不是零．

解答　8

解析　$\log_{10}8 = 3\log_{10}2 \approx 0.903$，$\log_{10}7 \approx 0.8451$，$\log_{10}\frac{1}{2^{27}} = -27\log_{10}2 \approx -8.127 = -9 + 0.873$

$\therefore$ 第一個不為零的數為 7，小數點後第 9 位開始不為 0，

$\log_{10}\dfrac{1}{3^{17}} = -17\log_{10}3 \approx -8.1107 = -9 + 0.8893$

$\therefore$ 第一個不為零的數為 7，小數點後第 9 位開始不為 0，$7 + 7 = 14$(進位)

$\therefore$ $\dfrac{1}{2^{27}}+\dfrac{1}{3^{17}}$ 小數點後第 8 位開始不為 0

11.已知 $\log_{10}2 \approx 0.3010$，$\log_{10}3 \approx 0.4771$，$\log_{10}7 \approx 0.8451$，設 n 為一正整數，使得 n^{50} 為 56 位數，求 $n =$ ____________ .

解答 13

解析 $55 \le \log n^{50} < 56 \Rightarrow 55 \le 50\log n < 56 \Rightarrow 1.1 \le \log n < 1.12$

$\log 12 = 2\log 2 + \log 3 \approx 1.0791$，$\log 14 = \log 2 + \log 7 \approx 1.1461$，$12 < n < 14$ $\therefore$ $n = 13$

12.設 $x = \dfrac{7^{100}\times 3^{20}}{2^{300}}$，則(1) x 的整數部分位數為____________ . (2) x 的首位數字為____________ .

解答 (1) 4;(2) 5

解析 $\log x = \log\dfrac{7^{100}\times 3^{20}}{2^{300}} = 100\log 7 + 20\log 3 - 300\log 2$

$\approx 100 \times 0.8451 + 20 \times 0.4771 - 300 \times 0.3010 = 3.752$

(1)$\log x$ 的首數 $= 3 \Rightarrow x$ 的整數部分的位數 $= 4$

(2)$\log x$ 的尾數 $= 0.752$ $\because$ $\log 5 = \log\dfrac{10}{2} = 1 - \log 2 \approx 0.699$，$\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0.7781$

$\Rightarrow 0.699 < \log x$ 的尾數 $< 0.7781 \Rightarrow \log 5 < \log x < \log 6 \Rightarrow x$ 的首位數字為 5

13.滿足$-1 \le \log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x) < 0$ 之整數有____________個 .

解答 24

解析 原式 $\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(\dfrac{1}{3})^{-1} \le \log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x) < \log_{\frac{1}{3}}1$

底$\dfrac{1}{3} < 1 \Rightarrow (\dfrac{1}{3})^{-1} \ge \log_3 x > 1 \Rightarrow 1 < \log_3 x \le 3 \Rightarrow \log_3 3 < \log_3 x \le \log_3 3^3$

$\Rightarrow 3 < x \le 27$，$\therefore$ $x = 4$，5，6，…，27 共 24 個 .

14.設 $f(x) = \log_4 x + \log_4(16 - x)$於 $x = a$ 時的最大值為 b，則數對$(a，b) =$ ____________ .

解答 (8，3)

解析 真數大於 $0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 16 - x > 0 \end{cases}$，$\therefore$ $0 < x < 16$，

$f(x) = \log_4 x + \log_4(16 - x) = \log_4 x(16 - x) = \log_4(-x^2 + 16x) = \log_4[-(x - 8)^2 + 64]$，

$\therefore$ 當 $x = 8$ 時，$f(x)$有最大值$= \log_4 64 = 3$，即$(a，b) = (8，3)$.

15.$y = \log_3\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$，則 y 的範圍為____________ .

解答 $-1 \le y \le 1$

解析 設 $t = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$，去分母

$\therefore\ tx^2 + tx + t = x^2 - x + 1 \Rightarrow (t-1)x^2 + (t+1)x + (t-1) = 0$，$\because\ x$ 為實數，$\therefore\ D \geq 0$

$\Rightarrow (t+1)^2 - 4(t-1)(t-1) \geq 0 \Rightarrow -3t^2 + 10t - 3 \geq 0 \Rightarrow (3t-1)(t-3) \leq 0$，$\therefore\ \dfrac{1}{3} \leq t \leq 3$

取 log $\Rightarrow\ \log_3\dfrac{1}{3} \leq \log_3 t \leq \log_3 3 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$．

16.函數 $f(x) = 2(\log_2 2x)^2 + \log_2(2x)^2 + 2\log_2 x + 2$，

當 $x =$ (1)____________時，$f(x)$有最小值= (2)____________．

解答 (1)$\dfrac{1}{4}$;(2)-2

解析 $f(x) = 2(\log_2 2 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 2x + 2\log_2 x + 2 = 2(1 + \log_2 x)^2 + 2(1 + \log_2 x) + 2\log_2 x + 2$，

設 $t = \log_2 x \Rightarrow f(x) = 2(1+t)^2 + 2(1+t) + 2t + 2 = 2t^2 + 8t + 6 = 2(t+2)^2 - 2$，

$\therefore$ 當 $t = -2$ 時，$f(x)$有最小值$= -2$，此時 $\log_2 x = -2$，$\therefore\ x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$．

17.設 $x > 1$，$y > 1$，且 $2\log_x y - 2\log_y x + 3 = 0$，則 $x^2 - 8y^2$ 之最小值= ____________．

解答 -16

解析 設 $t = \log_x y$，$\because\ x > 1$，$y > 1$，$\therefore\ \log_x y > \log_x 1 = 0 \Rightarrow t > 0$，

原式 $\Rightarrow 2t - \dfrac{2}{t} + 3 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow (2t-1)(t+2) = 0$，$\therefore\ t = \dfrac{1}{2}$ 或-2（不合）

$\Rightarrow \log_x y = \dfrac{1}{2}$，$\therefore\ y = x^{\frac{1}{2}}$，$\therefore\ y^2 = x \Rightarrow x^2 - 8y^2 = x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$，

$\therefore$ 當 $x = 4$ 時，最小值$= -16$．

18.不等式 $2\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 1 > \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$ 的解為____________．

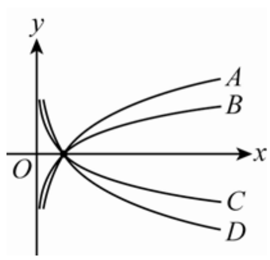
解答 $1 < x < 5$

解析 整理原式為 $2\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2} > \log_{\frac{1}{2}}(x+3) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}(x-1)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$，

$\dfrac{1}{2}(x-1)^2 < x+3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5 \cdots\cdots$①，

真數大於 0，故 $\begin{cases} x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases}$，得 $x > 1 \cdots\cdots$②，

由①②得 $1 < x < 5$．



19.下圖為 $y = \log_2 x$，$y = \log_{\frac{1}{2}} x$，$y = \log_3 x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的部分圖形．

(1)請判別 $y = \log_3 x$ 的圖形為____________．

(2)四數 $\log_2 2$，$\log_{\frac{1}{2}} 2$，$\log_3 2$，$\log_{\frac{1}{3}} 2$ 中，最小的數為____________．

解答 (1)B;(2)$\log_{\frac{1}{2}} 2$

解析 (1)底大於 1 時，底越大越靠近兩軸，故知 $y = \log_3 x$ 的圖形為 B．

(2)因 $x > 1$ 時，$\log_2 x > \log_3 x > 0 > \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{2}} x$，知最小的數為 $\log_{\frac{1}{2}} 2$．