高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.12.29					
範圍	3-4 對數不等式	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（ 每題 10 分 ）

1.若 $f(x)=\log_3\log_{0.3}\log_9 x$，則使 $f(x)$有意義的所有實數 x 範圍為____________．

解答 $1<x<9$

解析 $f(x)=\log_3[\log_{0.3}(\log_9 x)]$有意義 $\Rightarrow \log_{0.3}(\log_9 x)>0=\log_{0.3}1$

真數大於 0$\Rightarrow 0<\log_9 x<1 \Rightarrow \log_9 1<\log_9 x<\log_9 9 \Rightarrow 1<x<9$

$(0.3<1)$ $(9>1)$

2.已知對所有實數 x，$\log_2(x^2+x+a)$之值恆為正，求實數 a 的範圍為____________．

解答 $a>\dfrac{5}{4}$

解析 $\log_2(x^2+x+a)$之值恆為正

$\log_2(x^2+x+a)>0=\log_2 1 \Rightarrow x^2+x+a>1 \Rightarrow x^2+x+(a-1)>0$

$\Rightarrow 1^2-4(a-1)<0 \Rightarrow a>\dfrac{5}{4}$

3.解不等式：

(1) $\log_2(x-1)<1+\log_4(x+2)$之解為____________． (2) $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x)<1$ 之解為____________．

解答 (1) $1<x<7$;(2) $\dfrac{1}{8}<x<1$

解析 (1) 原式化為 $\log_2(x-1)<\log_2 2+\dfrac{1}{2}\log_2(x+2) \Rightarrow x-1<2(x+2)^{\frac{1}{2}}$

因為真數$>0 \Rightarrow (x-1)^2<4(x+2)$

$\Rightarrow x^2-6x-7<0 \Rightarrow (x+1)(x-7)<0 \Rightarrow -1<x<7$……①

∵真數大於 0 $\Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Rightarrow x>1$……②

由①②得 $1<x<7$

(2) $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x)<1 \Rightarrow \log_3(\log_{\frac{1}{2}} x)<\log_3 3$

真數>0 $\Rightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}} x<3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 1<\log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{2})^3$

且 $(\dfrac{1}{2}<1) \Rightarrow 1>x>\dfrac{1}{8}$

4.解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$得____________．

解答 $1<x<4$

解析 原式為 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x+1) \Rightarrow \log_{(\frac{1}{2})^2}(x-1)^2>\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x+1)$

$\frac{1}{2}<1 \Rightarrow (x-1)^2 < 2x+1 \Rightarrow x^2-4x<0 \Rightarrow 0<x<4$……①

真數大於 0 $\Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \quad \therefore x>1$……②

由①②得 $1<x<4$

5.不等式 $2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+1>\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$ 的解爲____________．

$\boxed{\text{解答}}$ $1<x<5$

$\boxed{\text{解析}}$ 原式爲 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$，

$\frac{1}{2}<1 \Rightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2<x+3 \Leftrightarrow x^2-4x-5<0 \Leftrightarrow -1<x<5$……①，

真數大於 0，故 $\begin{cases} x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases}$，得 $x>1$……②，

由①②得 $1<x<5$ ．

6.滿足 $0>\log_{\frac{1}{2}}\log_2 x>-2$ 的整數 x 共有____________個．

$\boxed{\text{解答}}$ 13

$\boxed{\text{解析}}$ $0>\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>-2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}1>\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-2}$

$\frac{1}{2}<1 \Rightarrow 1<\log_2 x<4 \Rightarrow \log_2 2<\log_2 x<\log_2 2^4 \Rightarrow 2<x<16$

$\therefore x=3$，4，5，6，……，15 共有 13 個整數值

7.解 $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x^2-3x+2)<1$，得____________．

$\boxed{\text{解答}}$ $-1<x<1$ 或 $2<x<4$

$\boxed{\text{解析}}$ $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x^2-3x+2)<1 \Rightarrow \log_6(x^2-3x+2)<\log_6 6$

又真數大於 0 $\Rightarrow 0<x^2-3x+2<6 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2<6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x<1 \text{ 或 } x>2 \\ -1<x<4 \end{cases} \Rightarrow -1<x<1$ 或 $2<x<4$

8.不等式 $(\log x)^2<\log x^2+3$ 之解爲____________．

$\boxed{\text{解答}}$ $\frac{1}{10}<x<1000$

$\boxed{\text{解析}}$ 設 $\log x=t \Rightarrow t^2-2t-3<0 \Rightarrow (t-3)(t+1)<0 \Rightarrow -1<t<3$

$\Rightarrow -1<\log x<3 \Rightarrow \log\frac{1}{10}<\log x<\log 1000 \Rightarrow \frac{1}{10}<x<1000$

9.函數 $f(x)=2(\log_2 2x)^2+\log_2(2x)^2+2\log_2 x+2$，當 $x=$ (1)_______時，$f(x)$有最小值= (2)___________．

解答 (1)$\frac{1}{4}$;(2)-2

解析 $f(x) = 2(\log_2 2 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 2x + 2\log_2 x + 2 = 2(1 + \log_2 x)^2 + 2(1 + \log_2 x) + 2\log_2 x + 2$,

設 $t = \log_2 x \Rightarrow f(x) = 2(1 + t)^2 + 2(1 + t) + 2t + 2 = 2t^2 + 8t + 6 = 2(t + 2)^2 - 2$,

$\therefore$ 當 $t = -2$ 時，$f(x)$有最小值$= -2$，此時 $\log_2 x = -2$，$\therefore x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

10.設 $x > 1$，$y > 1$，且 $2\log_x y - 2\log_y x + 3 = 0$，則 $x^2 - 8y^2$ 之最小值= ____________ .

解答 -16

解析 設 $t = \log_x y$，$\because x > 1$，$y > 1$，$\therefore \log_x y > \log_x 1 = 0 \Rightarrow t > 0$，

原式 $\Rightarrow 2t - \frac{2}{t} + 3 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow (2t - 1)(t + 2) = 0$，$\therefore t = \frac{1}{2}$ 或-2（不合）

$\Rightarrow \log_x y = \frac{1}{2}$，$\therefore y = x^{\frac{1}{2}}$，$\therefore y^2 = x \Rightarrow x^2 - 8y^2 = x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$,

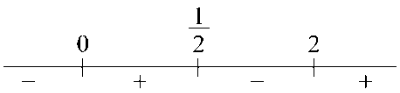
$\therefore$ 當 $x = 4$ 時，最小值$= -16$.

11.設 $\log_2 x + \log_x 2 < \frac{5}{2}$，則 x 的範圍是____________ .

解答 $0 < x < 1$ 或 $\sqrt{2} < x < 4$

解析 $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} - \frac{5}{2} < 0 \Rightarrow \frac{2(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 2}{2\log_2 x} < 0 \Rightarrow \frac{(2\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2)}{2\log_2 x}$

$\Rightarrow 2\log_2 x(2\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2) < 0$



$\therefore \log_2 x < 0$ 或 $\frac{1}{2} < \log_2 x < 2$，又真數 x 大於 0 即 $0 < x < 1$ 或 $\sqrt{2} < x < 4$

12.設 $\frac{1}{4} \le x \le 8$，$f(x) = x^{2 - \log_2 x}$ 之最大值爲____________ .

解答 2

解析 $f(x) = x^{2 - \log_2 x}$ ，取$\log_2 \Rightarrow \log_2 f(x) = \log_2 x^{2 - \log_2 x} = (2 - \log_2 x)\log_2 x$

設 $\log_2 x = t \Rightarrow \log_2 f(x) = (2 - t)t = -(t - 1)^2 + 1$

$\because \frac{1}{4} \le x \le 8 \Rightarrow -2 \le \log_2 x \le 3 \Rightarrow -2 \le t \le 3$

$\therefore$ 當 $t = 1$ 時，$\log_2 f(x)$有最大值$= 1 \Rightarrow f(x)$之最大值$= 2$

13.若 $f(x) = 2\log(x - 1) - \log(x - 2)$, $x > 2$, 則(1)當 $x =$ ________時, (2)$f(x)$有最小值= ____________.

解答 (1)3;(2)log4

解析 $f(x) = 2\log(x - 1) - \log(x - 2) = \log(x - 1)^2 - \log(x - 2) = \log\frac{(x-1)^2}{x-2}$ ，其中 $x - 2 > 0$

$\because\ \dfrac{(x-1)^2}{x-2}=\dfrac{[(x-2)+1]^2}{x-2}=(x-2)+2+\dfrac{1}{(x-2)}\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\dfrac{1}{(x-2)}}+2=4$

$\therefore f(x)$有最小値 $=\log 4$，又「$=$」成立時，$x-2=\dfrac{1}{x-2}\ \Rightarrow (x-2)^2=1$

$\Rightarrow x-2=\pm 1\Rightarrow x=3$ 或 $x=1$（不合）故當 $x=3$ 時，$f(x)$有最小値 $=\log 4$

14.不等式 $\log_x(2x^2+4x)>\log_x(2+x)$ 的解爲____________.

解答 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x>1$

解析 $\log_x(2x^2+4x)>\log_x(2+x)$

當 $x>1$ 時，$2x^2+4x>2+x\Rightarrow 2x^2+3x-2>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{2}$ 或 $x<-2\quad\therefore x>1$……①

當 $0<x<1$ 時，$2x^2+4x<2+x\Rightarrow -2<x<\dfrac{1}{2}\quad\therefore 0<x<\dfrac{1}{2}$……②

由①②知 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x>1$

15.設 $\log_2 x+\log_2 y=2$，則 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 之最小値爲____________.

解答 1

解析 $\log_2 x+\log_2 y=2\Rightarrow \log_2 xy=2\Rightarrow xy=4$

$\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}}\quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{xy}}=2\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1$

16.若 x，y 爲正實數，$\log_2 x+\log_2 y=2$，則

(1) $\log_2(x+y)$ 的最小值=____________.　(2)$(\log_2 x)(\log_2 y)$ 的最大值=____________.

解答 (1) 2;(2) 1

解析 (1)$\log_2 x+\log_2 y=2\Rightarrow \log_2 xy=2=\log_2 4$

$\therefore\ \begin{cases}x>0,\ y>0\\ xy=4\end{cases}\ \Rightarrow\ \dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\ \Rightarrow x+y\geq 4\Rightarrow \log_2(x+y)\geq\log_2 4=2$

$\therefore\ \log_2(x+y)$有最小値 $=2$

(2)$(\log_2 x)(\log_2 y)=(\log_2 x)(2-\log_2 x)=-(\log_2 x)^2+2\log_2 x=-(\log_2 x-1)^2+1$

$\therefore$ 當 $\log_2 x=1$，即 $x=2$ 時，$(\log_2 x)(\log_2 y)$有最大値 $=1$

※17.α 爲 $\log_5 x+x-7=0$ 之根，β 爲 $5^x+x-7=0$ 之根，則 $\alpha+\beta=$____________.(超過範圍)

解答 7

解析 α 爲 $\log_5 x+x-7=0$ 之根，β 爲 $5^x+x-7=0$ 之根 $\Rightarrow\begin{cases}\log_5\alpha=-\alpha+7\\ 5^\beta=-\beta+7\end{cases}$，

$\therefore(\alpha,\ -\alpha+7)$，$(\beta,\ -\beta+7)$分別爲 $y=-x+7$ 與 $y=\log_5 x$，$y=5^x$ 之交點坐標，

又 $y=\log_5 x$ 與 $y=5^x$ 之圖形對稱於 $y=x$，$\therefore\ \alpha=-\beta+7$，$-\alpha+7=\beta$，即 $\alpha+\beta=7$.

18.$y=\log_3\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$，則 y 的範圍爲____________.

解答 $-1\leq y\leq 1$

解析 設 $t=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$，

$\therefore\ tx^2+tx+t=x^2-x+1\Rightarrow(t-1)x^2+(t+1)x+(t-1)=0$，$\because\ x\in\boldsymbol{R}$，$\therefore\ D\geq 0$

$\Rightarrow(t+1)^2-4(t-1)(t-1)\geq 0\Rightarrow -3t^2+10t-3\geq 0\Rightarrow(3t-1)(t-3)\leq 0$，$\therefore\ \dfrac{1}{3}\leq t\leq 3$

$\Rightarrow\ \log_3\dfrac{1}{3}\leq\log_3 t\leq\log_3 3\Rightarrow -1\leq y\leq 1$.

19.某甲在股票市場買進賣出頻繁，假設每星期結算都損失該星期初資金的 1%，而第 n 星期結束後，資金總損失已超過原始資金的一半，則 n 的最小值爲____________ .（已知 $\log 9.9\approx 0.9956$）

解答 69

解析 設原始資金爲 P，n 個星期後資金爲 A，則 $A=P(1-0.01)^n$，

第 n 星期結束後，資金總損失已超過原始資金的一半，及剩下不到一半

$P(0.99)^n<\dfrac{1}{2}P$，$n\log 0.99<\log 0.5\Rightarrow n>\dfrac{-\log 2}{(\log 9.9)-1}\approx 68.41$，得 $n\geq 69$.