高雄市明誠中學 高一數學平時測驗				日期：99.12.22	
範圍	3-3 對數(2)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（每題 10 分 ）

1. 若 $\log_{x-1}(2x-x^2+3)$有意義，則 x 之範圍為____________．

解答 $1<x<3$，但 $x\neq 2$

解析 底 $0<x-1\neq 1 \Rightarrow 1<x\neq 2$……①

真數 $2x-x^2+3>0 \Rightarrow x^2-2x-3<0 \Rightarrow -1<x<3$……②

由①②得 $1<x<3$，但 $x\neq 2$

2. $4^{-2\log_2 3}+3^{\log_9 2}-5^{\frac{\log\sqrt{2}}{\log 5}}=$____________．

解答 $\dfrac{1}{81}$

解析 原式$=(2^2)^{-2\log_2 3}+3^{\log_3\sqrt{2}}-5^{\log_5\sqrt{2}}=2^{\log_2 3^{-4}}+3^{\log_3\sqrt{2}}-5^{\log_5\sqrt{2}}=3^{-4}+\sqrt{2}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{81}$

3. 設 $\log_4 x=-\dfrac{3}{2}$，$\log_y\dfrac{16}{81}=\dfrac{4}{3}$，則(1) $x=$____________． (2) $y=$____________．

解答 (1)$\dfrac{1}{8}$;(2)$\dfrac{8}{27}$

解析 (1) $\log_4 x=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=4^{-\frac{3}{2}}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$

(2) $\log_y\dfrac{16}{81}=\dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{16}{81}=y^{\frac{4}{3}} \Rightarrow (\dfrac{2}{3})^4=y^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y^{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow y=(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$

4. 設 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 11$，以 a，b 表示下列各式之值：

(1) $\log_2 12=$____________． (2) $\log_{66}18=$____________．

解答 (1)$2+a$;(2)$\dfrac{1+2a}{1+a+ab}$

解析 (1) $a=\log_2 3$，$b=\log_3 11$，$ab=\log_2 3\cdot\log_3 11=\log_2 11$

$\log_2 12=\log_2(2^2\times 3)=2\log_2 2+\log_2 3=2+a$

(2) $\log_{66}18=\dfrac{\log_2 18}{\log_2 66}=\dfrac{\log_2(2\times 3^2)}{\log_2(2\times 3\times 11)}=\dfrac{1+2\log_2 3}{1+\log_2 3+\log_2 11}=\dfrac{1+2a}{1+a+ab}$

5. 設 $\log_2 3=a$，$\log_3 5=b$，$\log_5 7=c$，則以 a，b，c 表示 $\log_{105}28$ 之值為____________．

解答 $\dfrac{2+abc}{a+ab+abc}$

解析 $\log_2 3=a$，$ab=\log_2 3\cdot\log_3 5=\log_2 5$，$abc=\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 7=\log_2 7$

$\log_{105}28=\dfrac{\log_2 28}{\log_2 105}=\dfrac{\log_2 4+\log_2 7}{\log_2 3+\log_2 5+\log_2 7}=\dfrac{2+abc}{a+ab+abc}$

6. 化簡 $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2}+\log_2\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\log_4\dfrac{1}{6}=$____________．

解答 $\frac{1}{2}$

解析 原式$=2\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{6}=\log_2[(\frac{1}{2})^2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{6}]=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

7. $\frac{\log 1.2}{\log 8+\log\sqrt{27}-\log\sqrt{1000}}=$____________ .

解答 $\frac{2}{3}$

解析 原式$=\frac{\log\frac{12}{10}}{\log\frac{2^3\cdot 3^{\frac{3}{2}}}{10^{\frac{3}{2}}}}=\frac{\log\frac{2^2\cdot 3}{10}}{\frac{3}{2}\log\frac{2^2\cdot 3}{10}}=\frac{2}{3}$

8. 求值：$\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}}+(\frac{\log 8}{\log 3}-\frac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2\sqrt{3}=$____________ .

解答 $-\frac{1}{2}$

解析 原式$=\log_3\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+(\frac{3\log 2}{\log 3}-\frac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2 3^{\frac{1}{2}}=\log_3 3^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(3\log_3 2-\frac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2 3$

9. $\log_2(\log_2\sqrt{2})$ 之值為____________ .

解答 -1

解析 $\log_2(\log_2\sqrt{2})=\log_2(\log_2 2^{\frac{1}{2}})=\log_2\frac{1}{2}=-1$.

10 . $\log_2(\log_2 49)+2\log_4(\log_7 2)$之值為____________ .

解答 1

解析 原式$=\log_2(\log_2 7^2)+2\log_{2^2}(\log_7 2)=\log_2(2\log_2 7)+\log_2(\log_7 2)=\log_2 2=1$

11. $\log_2(\log_2 32+\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}+\log_4 36)=$____________ .

解答 3

解析 原式$=\log_2(\log_2 2^5+\log_{2^{-1}}\frac{3}{4}+\log_{2^2}6^2)=\log_2(5-\log_2\frac{3}{4}+\log_2 6)$

$=\log_2(5+\log_2\frac{6}{\frac{3}{4}})=\log_2(5+3)=3$

12. 方程式 $\log_2(x-1)=\log_4(2-x)+1$ 之解為____________ .

解答 $-1+2\sqrt{2}$

解析 原式化為 $\log_4(x-1)^2=\log_4(2-x)+\log_4 4$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 4(2-x) \Rightarrow x^2 + 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm 2\sqrt{2}$ 但真數 $\begin{cases} x-1>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$ ， $x = -1 + 2\sqrt{2}$

13. 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) - 2\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 1$ 之解為____________ .

解答 $x = 5$

解析

$\log_{\frac{1}{2}}(x+3) - 2\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+3}{(x-1)^2} = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x+3}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 6 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ 或 -1 但真數 $\begin{cases} x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ ，得 $x = 5$

14. 方程式 $\log_x 9 - \log_3 x = 1$ 之所有根的和為____________ .

解答 $\dfrac{28}{9}$

解析 令 $\log_3 x = t$，∴ $\log_x 3 = \dfrac{1}{t}$,

原式 $\Rightarrow 2\log_x 3 - \log_3 x = 1 \Rightarrow 2 \times \dfrac{1}{t} - t = 1 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0$

$\Rightarrow t = -2$ 或 1，∴ $x = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ 或 $x = 3^1 = 3 \Rightarrow$ 二根之和$= \dfrac{1}{9} + 3 = \dfrac{28}{9}$.

15. 設 $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$，則 $x - y + z =$ ____________ .

解答 57

解析 由已知 $\Rightarrow \log_3(\log_4 x) = \log_4(\log_2 y) = \log_2(\log_3 z) = 1 \Rightarrow \log_4 x = 3$，$\log_2 y = 4$，$\log_3 z = 2$

$\Rightarrow x = 4^3 = 64$，$y = 2^4 = 16$，$z = 3^2 = 9 \Rightarrow x - y + z = 64 - 16 + 9 = 57$.

16.設方程式 $3^x - 3^{-x} = 2$ 的解為 $x = \log_9 k$，則 $k =$ ____________ .

解答 $3 + 2\sqrt{2}$

解析 $3^x - 3^{-x} = 2 \Rightarrow 3^x - \dfrac{1}{3^x} = 2 \Rightarrow 3^{2x} - 2 \times 3^x - 1 = 0$,

令 $t = 3^x > 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$，∴ $t = 1 \pm \sqrt{2}$（負不合）

$\Rightarrow 3^x = 1 + \sqrt{2}$ ，∴ $x = \log_3(1+\sqrt{2}) = \log_9(1+\sqrt{2})^2 = \log_9(3+2\sqrt{2})$，∴ $k = 3 + 2\sqrt{2}$.

17.若 $3^{\log x} \cdot x^{\log 3} - 2(3^{\log x} + x^{\log 3}) - 45 = 0$，則 $x =$ ____________ .

解答 100

解析 令 $3^{\log x} = t \Rightarrow x^{\log 3} = t$，∴ $t > 0$,

原式 $\Rightarrow t \times t - 2(t + t) - 45 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 45 = 0 \Rightarrow (t-9)(t+5) = 0$,

∴ $t = 9$ 或-5（不合） $\Rightarrow 3^{\log x} = 9 = 3^2$，∴ $\log x = 2$，∴$x = 100$.

18.若 $x^{1+\log_3 x} = 27x^3$，則 $x =$ ____________ .

解答 27 或 $\dfrac{1}{3}$

解析 兩邊同取 $\log_3 \Rightarrow \log_3 x^{1+\log_3 x} = \log_3(27x^3) \Rightarrow (1 + \log_3 x)\log_3 x = \log_3 27 + \log_3 x^3 = 3 + 3\log_3 x$,

令 $t = \log_3 x$，∴ $(1+t)t = 3 + 3t \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-3) = 0 \Rightarrow t = -1$ 或 3

$\Rightarrow \log_3 x = -1$ 或 3，∴$x = \dfrac{1}{3}$ 或 27 .

19.方程式 $x^2 + (2\log 5)x + \log\frac{5}{2} = 0$ 之解為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$-1 + 2\log 2$ 或-1

解析　原式 $\Rightarrow x^2 + (2\log 5)x + (\log 5 - \log 2) = 0 \Rightarrow x^2 + 2(1 - \log 2)x + (1 - 2\log 2) = 0$，

令 $\log 2 = a \Rightarrow x^2 + 2(1 - a)x + (1 - 2a) = 0 \Rightarrow [x + (1 - 2a)][x + 1] = 0$

$\Rightarrow x = -(1 - 2a) = -1 + 2\log 2$ 或 $x = -1$．

20.已知$(\log 3x)(\log ax) = 1$ 之二根乘積為 $\frac{1}{18}$，則 $a =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　6

解析　原式 $\Rightarrow (\log 3 + \log x)(\log a + \log x) = 1 \Rightarrow (\log x)^2 + (\log 3 + \log a)\log x + \log 3\log a - 1 = 0$，

令 $t = \log x \Rightarrow t^2 + (\log 3a)t + \log 3\log a - 1 = 0$，設 α，β 為 x 的二根，

$\therefore$ t 的二根為 $\log\alpha$，$\log\beta \Rightarrow \log\alpha + \log\beta = -\log 3a$，

$\therefore \log\alpha\beta = \log\frac{1}{3a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{3a} = \frac{1}{18}$，$\therefore a = 6$．

21.x 的方程式 $x^{(\log_2 x)-a} = 32$ 有一根為 $\frac{1}{2}$，則(1) $a =$ ＿＿＿＿＿＿．　(2)此方程式的另一根為＿＿＿＿＿＿．

解答　(1) 4;(2) 32

解析　(1)$\because$ $\frac{1}{2}$ 為 $x^{(\log_2 x)-a} = 32$ 之一根 $\Rightarrow (\frac{1}{2})^{(\log_2\frac{1}{2})-a} = 32 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{-1-a} = 2^5 \Rightarrow -1 - a = -5 \Rightarrow a = 4$

(2) $x^{(\log_2 x)-4} = 32 \Rightarrow \log_2 x^{(\log_2 x)-4} = \log_2 32 \Rightarrow (\log_2 x - 4)(\log_2 x) = 5$

$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5 = 0 \Rightarrow (\log_2 x - 5)(\log_2 x + 1) = 0 \Rightarrow \log_2 x = 5$，$-1$

$\Rightarrow x = 2^5$，$2^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$，32　　$\therefore$ 另一根為 32

22.若 α，β 為$(\log x)^2 - \log x^2 - 6 = 0$ 之兩根，則 $\log_\alpha\beta + \log_\beta\alpha$ 之值為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$-\frac{8}{3}$

解析　令 $t = \log x$，得 $t^2 - 2t - 6 = 0$ 之兩根為 $\log\alpha$，$\log\beta \Rightarrow \log\alpha + \log\beta = 2$，$(\log\alpha)(\log\beta) = -6$

$\therefore \log_\alpha\beta + \log_\beta\alpha = \frac{\log\beta}{\log\alpha} + \frac{\log\alpha}{\log\beta} = \frac{(\log\alpha + \log\beta)^2 - 2(\log\alpha)(\log\beta)}{(\log\alpha)(\log\beta)} = \frac{4 - 2\times(-6)}{-6} = -\frac{8}{3}$

23.二次方程式 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的二根為 $\log a$，$\log b$，則 $\log_a b + \log_b a$ 值為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$\frac{21}{2}$

解析　$\log a$ 與 $\log b$ 為 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 之二根　$\therefore \begin{cases} \log a + \log b = \frac{5}{2} \\ \log a\log b = \frac{1}{2} \end{cases}$

則 $\log_a b + \log_b a = \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b} = \frac{(\log a)^2 + (\log b)^2}{\log a\log b}$

$$=\frac{(\log a+\log b)^2-2\log a\log b}{\log a\log b}=\frac{(\frac{5}{2})^2-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{2}$$

24.$\log_{10}x + a\log_x 10 = b$，甲看錯 a，解得兩根為 100，100，乙看錯 b，解得兩根為 100 及 $\sqrt{1000}$，則正確之解為____________．

解答　10 或 1000

解析　原式 $\Rightarrow \log_{10}x+\dfrac{a}{\log_{10}x}=b \Rightarrow (\log_{10}x)^2-b\times\log_{10}x+a=0$，

甲看錯 a，得二根為 100，100 $\Rightarrow b$ 正確， $\log_{10}100+\log_{10}100=b$，$\therefore 2+2=b\Rightarrow b=4$，

乙看錯 b，得二根為 100， $\sqrt{1000}$ $\Rightarrow a$ 正確， $\log_{10}100\times\log_{10}\sqrt{1000}=a$，

$\therefore 2\times\dfrac{3}{2}=a\Rightarrow a=3$，即原式為$(\log_{10}x)^2-4\log_{10}x+3=0\Rightarrow(\log_{10}x-1)(\log_{10}x-3)=0$

$\Rightarrow \log_{10}x=1$ 或 3，

$\therefore x=10$ 或 1000．

25.設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 x＝____________．（化成最簡分數）

解答　$\dfrac{1}{4}$

解析　令 $t=\log_x 2$，

由 $\log_x 4-\log_2 x=1 \;\Rightarrow \log_x 2^2-\dfrac{1}{\log_x 2}=1\Rightarrow 2\log_x 2-\dfrac{1}{\log_x 2}=1\Rightarrow 2t-\dfrac{1}{t}=1$

$\Rightarrow 2t^2-t-1=0\Rightarrow(2t+1)(t-1)=0\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}$ 或 1 $\Rightarrow \log_x 2=-\dfrac{1}{2}$ 或 1 $\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$ 或 2，

但 $0<x<1$，故 $x=\dfrac{1}{4}$ ．

26.若 a，b，c 為正整數，已知 $a\log_{270}2+b\log_{270}3+c\log_{270}5=2$，則 a 為____________．

解答　2

解析　$a\log_{270}2+b\log_{270}3+c\log_{270}5=\log_{270}2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$，得

$2^a\cdot 3^b\cdot 5^c=270^2=(2\cdot 3^3\cdot 5)^2=2^2\cdot 3^6\cdot 5^2$，知 $a=2$ ．

27.設 $\log_a\alpha=\log_b\beta=\log_{\sqrt{ab}}10$，已知 $\alpha\neq\beta$，則 $\alpha\beta=$____________．

解答　100

解析　令 $\log_a\alpha=\log_b\beta=\log_{\sqrt{ab}}10=k$， $\alpha=a^k$， $\beta=b^k$， $10=(\sqrt{ab})^k=ab^{\frac{k}{2}}$，

$\alpha\beta=a^k\cdot b^k=(ab)^k=[(ab)^{\frac{k}{2}}]^2=10^2=100$ ．

28.設 $a=\log_7 4$, $b=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}3$, $c=\log_{\frac{1}{3}}0.5$, $d=\log_4 7$, 試比較 a, b, c, d 之大小順序為____________．

解答　$b>d>a>c$

解析　$b=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}3=\log_2 3=\log_4 9>\log_4 7>1$，$c=\log_{\frac{1}{3}}0.5=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}=\log_3 2=\log_9 4<\log_7 4<1$

故 $b>d>a>c$

29.比較下列 a，b，c，d，e 的大小：

(1) $a=(1.7)^{3.1}$，$b=(1.7)^{-2}$，$c=1$，$d=0$，$e=\sqrt[3]{1.7}$ ：＿＿＿＿＿＿＿ .

(2) $a=\log_{0.6}2$，$b=\log_{0.6}\sqrt{0.6}$ ，$c=\log_{0.6}0.5$，$d=0$，$e=1$：＿＿＿＿＿＿＿ .

解答 (1) $a>e>c>b>d$;(2) $c>e>b>d>a$

解析 (1)$a=(1.7)^{3.1}$，$b=(1.7)^{-2}$，$c=1=(1.7)^{0}$，$d=0$，$e=(1.7)^{\frac{1}{3}}$

$\because 1.7>1 \quad \therefore a>e>c>b>d$

(2)$a=\log_{0.6}2<\log_{0.6}1=0$，$b=\log_{0.6}\sqrt{0.6}=\dfrac{1}{2}$ ，$c=\log_{0.6}0.5>\log_{0.6}0.6=1$，$d=0$，$e=1$

$\therefore c>e>b>d>a$