高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：100.01.03
範圍	3-2、4 指數圖形 對數不等式	班級 座號	一年____班	姓名	

一、填充題（每題 10 分）

1. 已知對所有實數 x，$\log_2(x^2+x+a)$之值恆為正，求實數 a 的範圍為____________．

解答 $a>\frac{5}{4}$

解析 $\log_2(x^2+x+a)$之值恆為正

即$\log_2(x^2+x+a)>0=\log_2 1 \Rightarrow x^2+x+a>1 \Rightarrow x^2+x+(a-1)>0$ 恆成立

$\Rightarrow$ 判別式 $1^2-4(a-1)<0 \Rightarrow a>\frac{5}{4}$

2. 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$得____________．

解答 $1<x<4$

解析 真數大於 0 $\Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$ $\therefore\ x>1$……①

原式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x+1) \Rightarrow \log_{(\frac{1}{2})^2}(x-1)^2>\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x+1)$

底$\frac{1}{4}<1 \Rightarrow (x-1)^2<2x+1 \Rightarrow x^2-4x<0 \Rightarrow 0<x<4$……②

由①②得 $1<x<4$

3. 滿足 $0>\log_{\frac{1}{2}}\log_2 x>-3$ 的整數 x 共有____________個．

解答 253

解析 $0>\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>-3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}1>\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-3}$

底$\frac{1}{2}<1 \Rightarrow 1<\log_2 x<8 \Rightarrow \log_2 2<\log_2 x<\log_2 2^8 \Rightarrow 2<x<256$

$\therefore$ 整數 $x=3$，4，5，6，……，255 共有 253 個整數

4. 解$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x^2-3x+2)<1$，得____________．

解答 $-1<x<1$ 或 $2<x<4$

解析 $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x^2-3x+2)<1 \Rightarrow \log_6(x^2-3x+2)<1 \Rightarrow \log_6(x^2-3x+2)<\log_6 6$

底 $6>1 \Rightarrow 0<x^2-3x+2<6 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x<1 \text{ 或 } x>2 \\ -1<x<4 \end{cases} \Rightarrow -1<x<1$ 或 $2<x<4$

5. 不等式$(\log x)^2<\log x^2+3$ 之解為____________．

解答 $\frac{1}{10} < x < 1000$

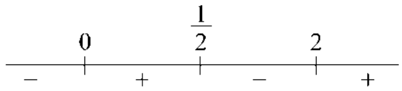
解析 設 $\log x = t \Rightarrow t^2 - 2t - 3 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) < 0 \Rightarrow -1 < t < 3$

$\log\frac{1}{10} < \log x < \log 1000 \Rightarrow \frac{1}{10} < x < 1000$ (底 10 大於 1)

6. 設 $\log_2 x + \log_x 2 < \frac{5}{2}$，則 x 的範圍是____________ .

解答 $0 < x < 1$ 或 $\sqrt{2} < x < 4$

解析 $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} - \frac{5}{2} < 0 \Rightarrow \frac{2(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 2}{2\log_2 x} < 0 \Rightarrow 2\log_2 x(2\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2) < 0$



$\therefore$ $\log_2 x < 0$ 或 $\frac{1}{2} < \log_2 x < 2$，即 $0 < x < 1$ 或 $\sqrt{2} < x < 4$

7. 不等式 $\log_x(2x^2 + 4x) > \log_x(2 + x)$ 的解為____________ .

解答 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x>1$

解析 $\log_x(2x^2 + 4x) > \log_x(2 + x)$

當 $x > 1$ 時，$2x^2 + 4x > 2 + x \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -2$ $\therefore$ $x > 1$……①

或當 $0 < x < 1$ 時，$2x^2 + 4x < 2 + x \Rightarrow -2 < x < \frac{1}{2}$ $\therefore$ $0 < x < \frac{1}{2}$……②

由①②知 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$

8. α 為 $\log_5 x + x - 8 = 0$ 之根，β 為 $5^x + x - 8 = 0$ 之根，則 $\alpha + \beta =$ ____________ .

解答 8

解析 α 為 $\log_5 x + x - 8 = 0$ 之根，β 為 $5^x + x - 8 = 0$ 之根 $\Rightarrow \begin{cases} \log_5 \alpha = -\alpha + 8 \\ 5^\beta = -\beta + 8 \end{cases}$，

$\therefore$ $(\alpha, -\alpha + 8)$，$(\beta, -\beta + 8)$分別為 $y = -x + 8$ 與 $y = \log_5 x$，$y = 5^x$ 之交點坐標，

又 $y = \log_5 x$ 與 $y = 5^x$ 之圖形對稱於 $y = x$，$\therefore$ $\alpha = -\beta + 8$，$-\alpha + 8 = \beta$，即 $\alpha + \beta = 8$.

9. 若 $y = \log_3\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$，則 y 的範圍為____________ .

解答 $-1 \le y \le 1$

解析 設 $t = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$，

$\therefore$ $tx^2 + tx + t = x^2 - x + 1 \Rightarrow (t - 1)x^2 + (t + 1)x + (t - 1) = 0$，$\because$ $x \in \boldsymbol{R}$，$\therefore$判別式 $D \ge 0$

$\Rightarrow (t + 1)^2 - 4(t - 1)(t - 1) \ge 0 \Rightarrow -3t^2 + 10t - 3 \ge 0 \Rightarrow (3t - 1)(t - 3) \le 0$，$\therefore$ $\frac{1}{3} \le t \le 3$

取$\log_3 \Rightarrow\ \log_3\frac{1}{3}\le\log_3 t\le\log_3 3\Rightarrow -1\le y\le 1$.

10.某甲在股票市場買進賣出頻繁，假設每星期結算都損失該星期初資金的 2%，而第 n 星期結束後，資金總損失已超過原始資金的一半，則 n 的最小值為____________ .（已知 $\log 98\approx 1.9912$）

解答 35

解析 設原始資金為 P，n 個星期後資金為 $P(1-0.02)^n$， $P(0.98)^n<\frac{1}{2}P\Rightarrow(0.98)^n<\frac{1}{2}$，

取log $\Rightarrow n\log 0.98<\log 0.5\Rightarrow n\log\frac{98}{100}<\log\frac{1}{2}\Rightarrow n(\log 98-\log 100)<\log 1-\log 2$

$\Rightarrow n>\frac{-\log 2}{(\log 98)-2}=\frac{-0.3010}{1.9912-2}\approx 34.20$，得 $n\ge 35$.

11.不等式$(0.1)^{x^2-5x+2}>100$ 的解為____________ .

解答 $1<x<4$

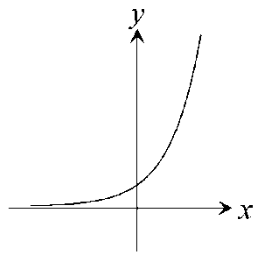
解析 $(0.1)^{x^2-5x+2}>(0.1)^{-2}$ ，底$0.1<1\Rightarrow x^2-5x+2<-2$

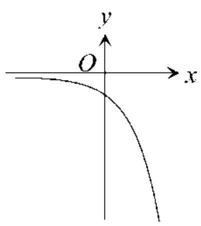
$\Rightarrow x^2-5x+4<0\Rightarrow(x-1)(x-4)<0\Rightarrow 1<x<4$

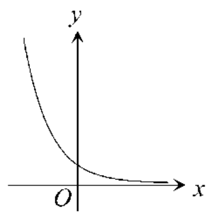
12.設右圖為 $f(x)=a^x$（$a>0$）的圖形，又 7 個函數：$g(x)=a^{-x}$，$h(x)=a^{|x|}$，

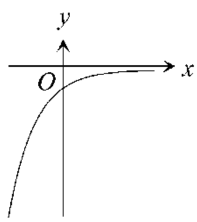
$k(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$， $\ell(x)=a^{-|x|}$，$m(x)=-a^x$，$n(x)=-a^{-x}$，$p(x)=-a^{-|x|}$，下列

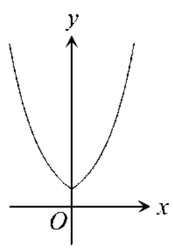
(1)～(5)之圖形分別為哪一個函數之圖形，請在 $g(x)$～$p(x)$中擇一填入 .

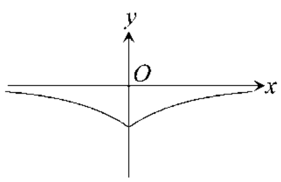


(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


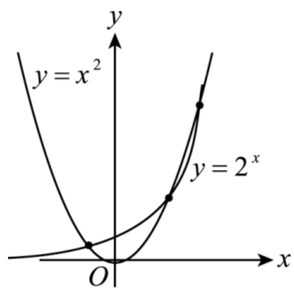
Ans：(1)____________ (2)____________ (3)____________ (4)____________ (5)____________ .

解答 (1) $m(x)$; (2) $g(x)$; (3) $n(x)$; (4) $h(x)$; (5) $p(x)$

解析 由已知圖形知 $a>1$

13.設方程式 $2^x=x^2$ 有 α 個實根，其中有 β 個是正根，則(α，β) =____________ .

解答 (3，2)



解析 $\begin{cases} y=2^x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow 2^x = x^2 \quad \Rightarrow x=2,4$

14.函數 $y=4^x$ 與 $y=2^{3x+2}$ 的圖形之交點坐標為____________ .

解答 $(-2,\dfrac{1}{16})$

解析 $\begin{cases} y=4^x \\ y=2^{3x+2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4^x=2^{3x+2} \quad \Rightarrow \quad 2x=3x+2 \Rightarrow x=-2\text{，}\quad y=\dfrac{1}{16}$

15.設 $a=8\sqrt{2}$，$b=4\sqrt[3]{4}$，$c=\sqrt[3]{256\sqrt{2}}$，$d=4^{\sqrt{3}}$，$e=2^{\pi}$，則 a，b，c，d，e 之大小順序為（由大而小排列）____________ .

解答 $a>d>e>c>b$

解析 $a=2^{\frac{7}{2}}$，$b=2^{\frac{8}{3}}$，$c=2^{\frac{17}{6}}$，$d=2^{2\sqrt{3}}$，$e=2^{\pi}$

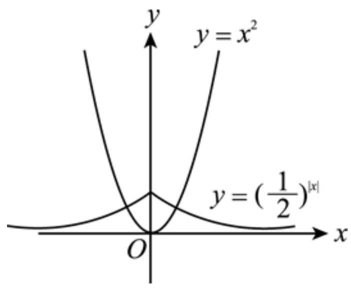
$\because\ \dfrac{7}{2}>2\sqrt{3}>\pi>\dfrac{17}{6}>\dfrac{8}{3}$，且 $f(x)=2^x$ 為遞增函數(y 隨 x 增大而變大)

$\therefore\ a>d>e>c>b$

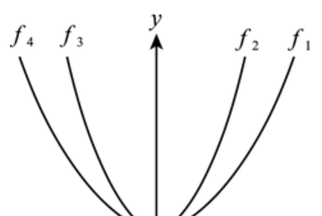
16.方程式 $x^2=(\dfrac{1}{2})^{|x|}$之實根共有____________個 .

解答 2

解析 方程式 $x^2=(\dfrac{1}{2})^{|x|}$之實根個數即$\begin{cases} y=x^2 \\ y=(\dfrac{1}{2})^{|x|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ y=2^{-|x|} \end{cases}$ 二圖形交點個數



17.指數函數 $f_1(x)=a^x$，$f_2(x)=b^x$，$f_3(x)=c^x$，$f_4(x)=d^x$ 之圖形如下，則四正數 a，b，c，d 之大小為____________ .



解答 $b>a>d>c$

解析 (1)底大於 1 時，底越大圖形越靠近兩軸

(1)底小於 1 時，分母越大(即底越小)圖形越靠近兩軸

由圖知 $b>a>d>c$.

18.若 x，y，z 均為正數，且 $2^x=3^y=5^z$，則 $2x$，$3y$，$5z$ 的大小關係為____________ .

解答 $5z>2x>3y$

解析 $\because\ 2^x=3^y \Rightarrow (2^x)^6=(3^y)^6 \Rightarrow (2^3)^{2x}=(3^2)^{3y} \Rightarrow 8^{2x}=9^{3y} \because\ 8<9 \Rightarrow 2x>3y$

同理，$2^x=5^z \Rightarrow (2^x)^{10}=(5^z)^{10} \Rightarrow (2^5)^{2x}=(5^2)^{5z} \Rightarrow 32^{2x}=25^{5z}$

$\because\ 32>25 \Rightarrow 2x<5z \quad \therefore\ 5z>2x>3y$

19.若 $-1\le x\le 0$，$f(x)=2^{x+2}-3\cdot 4^x-1$，當 $x=x_0$時，$f(x)$有最小值 y_0，則$(x_0，y_0)=$_____________ .

解答 $(0，0)$

解析 令 $t=2^x$ $\because\ -1\le x\le 0 \Rightarrow 2^{-1}\le 2^x\le 2^0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\le t\le 1$

$$f(x)=4t-3t^2-1=-3(t-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}-1=-3(t-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 當 $t=1$，即 $x=0$ 時，$f(x)$有最小值$=f(0)=0$

20.若 x 為大於 0 的實數，則不等式 $x^{2x^3-3x^2}>x^{3x-2}$ 的解為____________ .

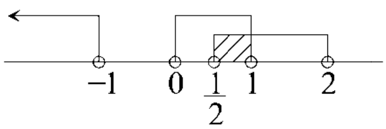
解答 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 或 $2<x$

解析 (1) $x>1$ 時，$x^{2x^3-3x^2}>x^{3x-2} \Rightarrow 2x^3-3x^2>3x-2 \Rightarrow (x+1)(x-2)(2x-1)>0$

$\Rightarrow -1<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x>2$……①，但 $x>1$……②，由①、②知 $x>2$

(2) $0<x<1$ 時，$2x^3-3x^2<3x-2 \Rightarrow (x+1)(x-2)(2x-1)<0$

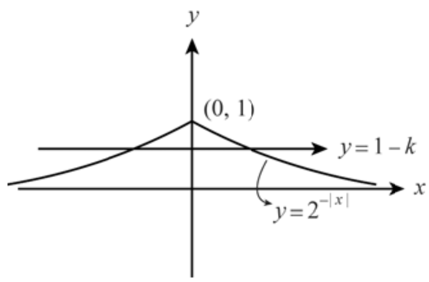
$\Rightarrow x<-1$ 或$\dfrac{1}{2}<x<2$……③，但 $0<x<1$……④，由③、④知$\dfrac{1}{2}<x<1$



(3) $x=1$ 時，顯然不合

由(1)(2)(3)知此不等式之解為$\dfrac{1}{2}<x<1$ 或 $2<x$

21.若方程式 $2^{-|x|}+k-1=0$ 有實根,試求實數 k 的範圍為__________ .



解答 $0\le k<1$

解析

$2^{-|x|}+k-1=0 \Rightarrow 2^{-|x|}=1-k$，解$\begin{cases} y=2^{-|x|} \\ y=1-k \end{cases}$，

並作圖如右，$\because$原式有實根，$\therefore$圖形有交點 $\Rightarrow 0<1-k\le 1$，$\therefore 0\le k<1$.

22.在坐標平面上，若 $y=2^x$ 的圖形恆在 $y=3-2^{-x+1}$ 的圖形的上方，則 x 的範圍為____________ .

解答 $x<0$ 或 $x>1$

解析 $\because y=2^x$ 的圖形恆在 $y=3-2^{-x+1}$ 的圖形上方，即 $2^x>3-2^{-x+1} \Rightarrow 2^x+2^{-x+1}-3>0$ 恆成立，

設 $t=2^x>0 \Rightarrow t+\dfrac{2}{t}-3>0 \Rightarrow t^2-3t+2>0 \Rightarrow (t-1)(t-2)>0 \Rightarrow t>2$ 或 $t<1$，

$\Rightarrow 2^x>2$ 或 $2^x<1$，$\therefore\ x>1$ 或 $x<0$.

23.設 $0\le x\le 3$，求$(\dfrac{1}{5})^{x^2-2x}$的最小值為____________ .

解答 $\frac{1}{125}$

解析 $(\frac{1}{5})^{x^2-2x}=(5^{-1})^{x^2-2x}=5^{-x^2+2x}=5^{-(x-1)^2+1}$，$\because$ $0\le x\le 3$，$\therefore$當 $x=3$ 時，最小值$=5^{-3}=\frac{1}{125}$ ．

24.若 $3^x+2^x>3^{50}$，則最小的正整數 $x=$ ____________ ．

解答 50

解析 $\because x=50\Rightarrow$ $3^{50}+2^{50}>3^{50}$，

又 $x=49\Rightarrow$ $(3^{49}+2^{49})-3^{50}=2^{49}+(3^{49}-3^{50})=2^{49}+3^{49}(1-3)=2^{49}-2\times 3^{49}<0$，

$\Rightarrow$ $3^{49}+2^{49}<3^{50}$

故 x 的最小正整數值$=50$ ．