高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.12.15					
範圍	3-2、3 指數不等式、對數(1)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（每題 10 分 ）

1. 設 $a=(\frac{1}{2})^{-1}$，$b=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，$c=\sqrt[3]{4}$，$d=8^{\frac{-1}{3}}$，則 a，b，c，d 之大小順序為____________．

解答 $a>c>b>d$

解析 $a=2^1$，$b=2^{-\frac{1}{2}}$，$c=2^{\frac{2}{3}}$，$d=2^{-1} \Rightarrow 1>\frac{2}{3}>-\frac{1}{2}>-1 \quad \therefore a>c>b>d$

2. 試比較 $2^{\frac{1}{2}}$，$3^{\frac{1}{3}}$，$5^{\frac{1}{5}}$ 之大小為____________．

解答 $3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}$

解析 $(3^2)^{\frac{1}{6}}>(2^3)^{\frac{1}{6}} \Rightarrow 3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}$，又$(2^5)^{\frac{1}{10}}>(5^2)^{\frac{1}{10}} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}$，故 $3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}$

3. $a=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，$b=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，$c=(\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$，試比較 a，b，c 的大小關係為____________．

解答 $b<a<c$

解析 $a=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=(\frac{1}{2})^{3\cdot\frac{1}{6}}=(\frac{1}{8})^{\frac{1}{6}}$，$b=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}=(\frac{1}{3})^{2\cdot\frac{1}{6}}=(\frac{1}{9})^{\frac{1}{6}}$，$c=(\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$

$\because \frac{1}{9}<\frac{1}{8}<\frac{1}{6} \quad \therefore (\frac{1}{9})^{\frac{1}{6}}<(\frac{1}{8})^{\frac{1}{6}}<(\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$，故 $b<a<c$

4. 若 x，y，z 均為正數，且 $2^x=3^y=5^z$，則 $2x$，$3y$，$5z$ 的大小關係為____________．

解答 $5z>2x>3y$

解析 $\because 2^x=3^y \Rightarrow (2^x)^6=(3^y)^6 \Rightarrow (2^3)^{2x}=(3^2)^{3y} \Rightarrow 8^{2x}=9^{3y} \quad \because 8<9 \Rightarrow 2x>3y$

同理，$2^x=5^z \Rightarrow (2^x)^{10}=(5^z)^{10} \Rightarrow (2^5)^{2x}=(5^2)^{5z} \Rightarrow 32^{2x}=25^{5z}$

$\because 32>25 \Rightarrow 2x<5z \quad \therefore 5z>2x>3y$

5. 不等式$(0.4)^{x^2-5x+2}>(6.25)^2$之解為____________．

解答 $2<x<3$

解析 $(0.4)^{x^2-5x+2}>(6.25)^2 \Rightarrow (\frac{2}{5})^{x^2-5x+2}>(\frac{5}{2})^4=(\frac{2}{5})^{-4}$

$(\because 0<$ 底數$=\frac{2}{5}<1) \quad \Rightarrow x^2-5x+2<-4$

$x^2-5x+6<0 \Rightarrow (x-2)(x-3)<0 \Rightarrow 2<x<3$

6. $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4\le 0$ 之解為________________．

解答 $-1\le x\le 2$

解析 $2\cdot(2^x)^2-9\cdot(2^x)+4\le 0 \Rightarrow (2\cdot 2^x-1)(2^x-4)\le 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\le 2^x\le 4 \Rightarrow -1\le x\le 2$

7. 解不等式 $2^{2x}-3\cdot 2^{x-1}-1>0$ 為____________．

解答 $x>1$

解析 $2^{2x}-3\cdot 2^{x-1}-1>0\Rightarrow (2^x)^2-\dfrac{3}{2}(2^x)-1>0$

$\Rightarrow 2(2^x)^2-3(2^x)-2>0\Rightarrow (2\cdot 2^x+1)(2^x-2)>0$

又 $2\cdot 2^x+1>0$ 恆成立 $\Rightarrow 2^x-2>0\Rightarrow 2^x>2\Rightarrow x>1$

8. 不等式 $2\cdot 6^x-3^x-18\cdot 2^x+9<0$ 之解為____________．

解答 $-1<x<2$

解析 $2\cdot 6^x-3^x-18\cdot 2^x+9<0\Rightarrow (3^x-9)(2\cdot 2^x-1)<0$

$\Rightarrow (3^x-9)(2^{x+1}-2^0)<0\Rightarrow (x-2)(x+1)<0\Rightarrow -1<x<2$

9.若 $-1\le x\le 0$，$f(x)=2^{x+2}-3\cdot 4^x-1$，當 $x=x_0$ 時，$f(x)$有最小值 y_0，則$(x_0，y_0)=$____________．

解答 (0，0)

解析 令 $t=2^x$ $\because -1\le x\le 0\ \Rightarrow\ 2^{-1}\le 2^x\le 2^0\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{2}\le t\le 1$

$f(x)=4t-3t^2-1=-3(t-\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{4}{3}-1=-3(t-\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 當 $t=1$，即 $x=0$ 時，$f(x)$有最小值$=f(0)=0$

10.不等式 $2^{1+2x}+2^{1-2x}-7(2^x+2^{-x})+9<0$，則 2^x+2^{-x} 的範圍為__________________．

解答 $2\le\ 2^x+2^{-x}<\dfrac{5}{2}$

解析 令 $t=2^x+2^{-x}$ $\because 2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}$ $\Rightarrow t\ge 2$……①

又 $t^2=2^{2x}+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+2^{-2x}\Rightarrow 2^{2x}+2^{-2x}=t^2-2$

原式 $\Rightarrow\ 2(2^{2x}+2^{-2x})-7(2^x+2^{-x})+9<0$

$\Rightarrow 2(t^2-2)-7t+9<0\Rightarrow 2t^2-7t+5<0\ \Rightarrow\ (2t-5)(t-1)<0$

$\therefore 1<t<\dfrac{5}{2}$……②

由①②知，$2\le t<\dfrac{5}{2}$，即 $2\le 2^x+2^{-x}<\dfrac{5}{2}$

11.試求函數 $f(x)=2(4^x+4^{-x})-6(2^x+2^{-x})+17$ 之最小值=____________．

解答 9

解析 令 $k=2^x+2^{-x}$，由算幾不等式得 $\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\ge\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=1$，

$\therefore 2^x+2^{-x}\ge 2\Rightarrow k\ge 2$，又 $4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2\times 2^x\times 2^{-x}=k^2-2$

$\Rightarrow f(x)=2(k^2-2)-6k+17=2k^2-6k+13=2(k-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{17}{2}$，

$\therefore$當 $k=2$ 時，$f(x)$有最小值= 9．

12.設$-2\le x\le 8$，若函數 $f(x)=2^x-2^{\frac{x+4}{2}}$ 的最大值為 M，最小值為 m，則

(1)$(M，m)=$____________．(2)又方程式 $f(x)=32$ 的解為____________．

解答 (1)(192，−4);(2)$x=6$

解析 (1) $f(x) = 2^x - 2^{\frac{x+4}{2}} = 2^x - 2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{2}} = (2^{\frac{x}{2}})^2 - 4 \cdot 2^{\frac{x}{2}} = (2^{\frac{x}{2}} - 2)^2 - 4$

$\because -2 \le x \le 8 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le 2^{\frac{x}{2}} \le 16$

$\therefore$ 當 $2^{\frac{x}{2}} = 16$ 時，$f(x)$有最大值 $M = (16-2)^2 - 4 = 192$

當 $2^{\frac{x}{2}} = 2$ 時，$f(x)$有最小值 $m = -4$，即$(M，m) = (192，-4)$

(2) $f(x) = (2^{\frac{x}{2}} - 2)^2 - 4 = 32 \Rightarrow (2^{\frac{x}{2}} - 2)^2 = 36 = 6^2$

$\Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} - 2 = 6 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 8 = 2^3 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$

13.設 $0 \le x \le 3$，求 $(\frac{1}{5})^{x^2-2x}$ 的最小值為____________.

解答 $\dfrac{1}{125}$

解析 $(\frac{1}{5})^{x^2-2x} = (5^{-1})^{x^2-2x} = 5^{-x^2+2x} = 5^{-(x-1)^2+1}$，$\because 0 \le x \le 3$，$\therefore$當 $x = 3$ 時，最小值$= 5^{-3} = \dfrac{1}{125}$.

14.設 $x \ge 0$，$y \ge 0$ 且 $x + y = 1$，求 $4^x + 4^y$ 的(1)最大值為____________.(2)最小值為____________.

解答 (1)5;(2)4

解析 (1)$\because x \ge 0$，$y \ge 0$，$\therefore 4^x \ge 4^0 = 1$，$4^y \ge 4^0 = 1 \Rightarrow 4^x - 1 \ge 0$，$4^y - 1 \ge 0$，

$\therefore (4^x - 1)(4^y - 1) \ge 0 \Rightarrow 4^{x+y} - 4^x - 4^y + 1 \ge 0$，

$\therefore 4^{x+y} + 1 \ge 4^x + 4^y \Rightarrow 4^x + 4^y \le 4^1 + 1 = 5$，$\therefore$最大值為 5 .

(2)算術平均數 ≥ 幾何平均數 $4^x + 4^y \ge 2\sqrt{4^x \cdot 4^y} = 2\sqrt{4^{x+y}} = 2\sqrt{4} = 4$，$\therefore$最小值為 4 .

15.若 x 為大於 0 的實數，則不等式 $x^{2x^3-3x^2} > x^{3x-2}$ 的解為____________.

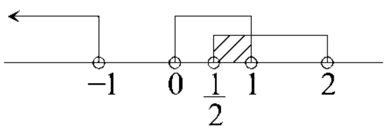
解答 $\dfrac{1}{2} < x < 1$ 或 $2 < x$

解析 (1) $x > 1$ 時，$x^{2x^3-3x^2} > x^{3x-2} \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 > 3x - 2 \Rightarrow (x+1)(x-2)(2x-1) > 0$

$\Rightarrow -1 < x < \dfrac{1}{2}$ 或 $x > 2$……①，但 $x > 1$……②，由①、②知 $x > 2$

(2) $0 < x < 1$ 時，$2x^3 - 3x^2 < 3x - 2 \Rightarrow (x+1)(x-2)(2x-1) < 0$

$\Rightarrow x < -1$ 或$\dfrac{1}{2} < x < 2$……③，但 $0 < x < 1$……④，由③、④知$\dfrac{1}{2} < x < 1$



(3) $x=1$ 時，不合

由(1)(2)(3)知此不等式之解為 $\frac{1}{2}<x<1$ 或 $2<x$

16. 求下列對數的值：

(1) $\log_2 16=$__________ . (2) $\log_2 \frac{1}{8}=$__________ . (3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{8}=$__________ .

(4) $\log_5 5^{\sqrt{2}}=$__________ . (5) $10^{\log_{10} 2}=$__________ .

解答 (1)4 ; (2) -3 ; (3) $\frac{5}{2}$; (4) $\sqrt{2}$; (5) 2

解析

(1) $16=2^4$，故 $\log_2 16=4$.

(2) $\frac{1}{8}=2^{-3}$，故 $\log_2 \frac{1}{8}=-3$.

(3) $\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^3}=2^{-\frac{5}{2}}=(\frac{1}{2})^{\frac{5}{2}}$，故 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{5}{2}$.

(4) $\log_5 5^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

(5) $10^{\log_{10} 2}=2$.

17. 求下列各式的值：

(1) $\log_{10} 4+\log_{10} 25=$__________ . (2) $\log_2 24-\log_2 3=$__________ . (3) $\log_{10} \frac{2}{3}+\log_{10} \frac{3}{5}-\log_{10} \frac{1}{25}=$__________ .

解答 (1)2 ; (2) 3; (3) 1;

解析

(1) $\log_{10} 4+\log_{10} 25=\log_{10}(4\times 25)=\log_{10} 100=2$.

(2) $\log_2 24-\log_2 3=\log_2 \frac{24}{3}=\log_2 8=3$.

(3) $\log_{10} \frac{2}{3}+\log_{10} \frac{3}{5}-\log_{10} \frac{1}{25}=\log_{10}(\frac{2}{3}\times \frac{3}{5}\times 25)=\log_{10} 10=1$.

18. $\log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3}+\log_4 6=$__________

解答 $\frac{5}{2}$

解析

$$\log_2\frac{4\sqrt{3}}{3}+\log_4 6=\log_2 4\sqrt{3}-\log_2 3+\frac{\log_2 6}{\log_2 4}=2+\log_2\sqrt{3}-\log_2 3+\frac{1}{2}(1+\log_2 3)$$

$$=2+\frac{1}{2}\log_2 3-\log_2 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{5}{2}$$.

19.化簡求下列各值：

(1) $\log_{10}\frac{25}{9}-\log_{10}5+\log_{10}\frac{27}{35}-\log_{10}\frac{3}{70}=$ ____________ .

(2) $(\log_2 3+\log_{16}81)(\log_3 8-\log_9 2)=$ ____________ .

解答 (1) 1;(2) 5

解析 (1)原式= $\log_{10}(\frac{25}{9}\div 5\times\frac{27}{35}\div\frac{3}{70})=\log_{10}(\frac{25}{9}\times\frac{1}{5}\times\frac{27}{35}\times\frac{70}{3})=\log_{10}10=1$

(2)原式= $(\log_2 3+\frac{4}{4}\log_2 3)(3\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3 2)=2\log_2 3\times\frac{5}{2}\log_3 2=55$

20. $3^{\frac{2\log_2 5}{\log_2 3}}+5^{\log_{\sqrt{2}}4}=$ ____________ .

解答 650

解析 原式= $3^{\log_3 5^2}+5^{\log_2 16}=25+5^4=650$

21.設 $\log_4 x=-\frac{3}{2}$， $\log_y\frac{16}{81}=\frac{4}{3}$， 則(1) $x=$ ____________ .　(2) $y=$ ____________ .

解答 (1) $\frac{1}{8}$;(2) $\frac{8}{27}$

解析 (1) $\log_4 x=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=4^{-\frac{3}{2}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$

(2) $\log_y\frac{16}{81}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{16}{81}=y^{\frac{4}{3}}\Rightarrow(\frac{2}{3})^4=y^{\frac{4}{3}}\Rightarrow y^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\Rightarrow y=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

22.若 $\log 3=a$，$\log 2=b$，則 $10^{a-2b+1}=$ ____________ .

解答 $\frac{15}{2}$

解析 $\log 3=a$, ∴ $10^a=3$, $\log 2=b$, ∴ $10^b=2$， ⇒ 所求= $10^a\times(10^b)^{-2}\times 10=3\times 2^{-2}\times 10=\frac{15}{2}$.

23. $3\log_2\sqrt{2}-\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=$ ____________ .

解答 $\frac{5}{2}$

解析 原式= $3\log_2 2^{\frac{1}{2}}-\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\log_2 3+1+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{5}{2}$

24.求 $3^{\log_3 5}+\log_2\sqrt{8}-\log_3 1+\log_5 8\cdot\log_2 25=$ ____________ .

解答 $\frac{25}{2}$

解析 $3^{\log_3 5}+\log_2\sqrt{8}-\log_3 1+\log_5 8 \cdot \log_2 25$

$$=5+\log_2 2^{\frac{3}{2}}-0+3\log_5 2 \cdot \log_2 25=5+\frac{3}{2}+3\log_5 25=5+\frac{3}{2}+6=\frac{25}{2}$$

25.$\log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_{125} 8 \cdot \log_{49} 9=$____________．

解答 1

解析 原式$=\log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 2 \cdot \log_7 3=\log_3 3=1$

26.若$\log_{x-2}(2x^2-13x+20)$有意義，則x的範圍是____________________．

解答 $2<x<\frac{5}{2}$或$x>4$

解析 真數 >0，底數 >0 且$\neq 1$

$$\begin{cases}2x^2-13x+20>0\\x-2>0\\x-2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2x-5)(x-4)>0\\x>2\\x\neq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<\frac{5}{2}\ or\ x>4\\x>2\\x\neq 3\end{cases}\Rightarrow 2<x<\frac{5}{2}\quad x>4$$