<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：99.11.24</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-1 指數函數</td><td>班級</td><td>一年____班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題 (每題 10 分)

1. 化簡 $\sqrt[3]{\sqrt[8]{64^{-0.2}}\cdot\sqrt{32}}\cdot\sqrt[3]{8^{-3}}\cdot(\sqrt[4]{\sqrt[3]{16^{-1}}})^{-2}=2^k$，$k=$__________．

解答 $-\dfrac{31}{20}$

解析 原式 $=[((2^6)^{-0.2})^{\frac{1}{8}}\cdot(2^5)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}\cdot((2^3)^{-3})^{\frac{1}{3}}\cdot(((2^{-4})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}})^{-2}=[2^{-\frac{3}{20}}\cdot 2^{\frac{5}{2}}]^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{47}{60}}\cdot 2^{-3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{31}{20}}$

2. 化簡求值：

(1)$[(\dfrac{1}{4})^6\cdot 64]^{-4}\cdot(32)^{-3}=$__________．　(2)$(\dfrac{81}{16})^{-0.25}\cdot(\dfrac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}\cdot(0.25)^{-1.5}=$__________．

解答 (1) 512;(2) 8

解析 (1)原式 $=(2^{-12}\times 2^6)^{-4}\times(2^5)^{-3}=2^{24}\times 2^{-15}=2^9=512$

(2)原式 $=[(\dfrac{3}{2})^4]^{-\frac{1}{4}}\times[(\dfrac{2}{3})^2]^{-\frac{1}{2}}\times[(\dfrac{1}{2})^2]^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{2}\times 8=8$

3. 若 $\sqrt[5]{5^{20}}\times\sqrt{\sqrt{5^{12}}}\times[(\dfrac{1}{125})^3\times(625)^2]^{-3}=5^x$，則 $x=$____________．

解答 10

解析 $5^x=5^{\frac{20}{5}}\times[(5^{12})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\times[(5^{-3})^3\times(5^4)^2]^{-3}$

$=5^4\times[5^6]^{\frac{1}{2}}\times[5^{-9}\times 5^8]^{-3}=5^4\times 5^3\times(5^{-1})^{-3}=5^4\times 5^3\times 5^3=5^{10}$，$\therefore\ x=10$．

4. 設 $a>0$，且 $a^{2x}=3$，求 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=$__________．

解答 $\dfrac{14}{3}$

解析 分子分母同乘 a^x

$$\text{原式}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}=\frac{3^2+3^{-1}}{3-1}=\frac{9+\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{28}{3}}{2}=\frac{14}{3}$$

5. 若 $a^x+a^{-x}=5$，則 $a^{3x}+a^{-3x}=$__________．

解答 110

解析 由求值公式：$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^x+a^{-x}=5$，$a^{3x}+a^{-3x}=(a^x+a^{-x})^3-3a^x\cdot a^{-x}(a^x+a^{-x})=5^3-3\times 5=110$

6.若 $a>0$，且 $a^{3x}+a^{-3x}=18$，則(1) $a^x+a^{-x}=$__________．　(2) $a^x=$__________．

解答 (1) 3;(2) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

解析 (1)令 $a^x+a^{-x}=t\Rightarrow\ a^{3x}+a^{-3x}=(a^x+a^{-x})^3-3a^x\cdot a^{-x}(a^x+a^{-x})$

$\Rightarrow\quad 18=t^3-3\cdot1\cdot t$

$\Rightarrow t^3-3t-18=0\Rightarrow(t-3)(t^2+3t+6)=0$

$\because\ t\in\boldsymbol{R}\Rightarrow t=3$（$t^2+3t+6=0$，判別式$<0$，二根爲虛根不合），即 $a^x+a^{-x}=3$

(2)$a^x+a^{-x}=3$ ，設 $a^x=s\Rightarrow\ s+\dfrac{1}{s}=3\Rightarrow s^2+1=3s$

$s^2-3s+1=0\Rightarrow\Rightarrow a^x=s=\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

7. 設 $\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$，且 $3^{15y+3x}=81^{xy}$，則$(x,y)=$__________．

解答 (5,3)

解析 $\begin{cases}\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}\\3^{15y+3x}=81^{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{\frac{5}{x}}=2^{3-\frac{6}{y}}\\3^{15y+3x}=3^{4xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x}=3-\dfrac{6}{y}\\15y+3x=4xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=3\\\dfrac{15}{x}+\dfrac{3}{y}=4\end{cases}\ \therefore\ (x,y)=(5,3)$

8. $(3.5)^x=(0.035)^y=100$，則$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=$__________．

解答 1

解析 $\begin{cases}(3.5)^x=100\Rightarrow 3.5=100^{\frac{1}{x}}\quad\cdots\cdots①\\(0.035)^y=100\Rightarrow 0.035=100^{\frac{1}{y}}\quad\cdots\cdots②\end{cases}$，$\dfrac{①}{②}$ 得$100^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\dfrac{3.5}{0.035}=100\qquad\therefore\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1$

9. 若 $53^x=9$，$477^y=243$，則$\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=$__________．

解答 -2

解析 $\begin{cases}53^x=3^2\\477^y=3^5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}53=3^{\frac{2}{x}}\quad\cdots\cdots①\\477=3^{\frac{5}{y}}\quad\cdots\cdots②\end{cases}$，① ÷ ② 得 $3^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}=\dfrac{53}{477}=\dfrac{1}{9}=3^{-2}\quad\therefore\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=-2$

10.設 $\sqrt[x]{81}=\sqrt[y]{3^{2y-3}}$，且 $8^{x+4y}=16^{xy}$，則數對$(x,y)=$__________．

解答 (4,3)

解析 $\sqrt[x]{81}=\sqrt[y]{3^{2y-3}}\ \Rightarrow 3^{\frac{4}{x}}=3^{\frac{2y-3}{y}}\ \Rightarrow\ \dfrac{4}{x}=\dfrac{2y-3}{y}\ \Rightarrow\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=2\cdots\cdots①$

$8^{x+4y}=16^{xy}\Rightarrow 2^{3x+12y}=2^{4xy}\Rightarrow 3x+12y=4xy\Rightarrow\ \dfrac{12}{x}+\dfrac{3}{y}=4\cdots\cdots②$

由② − ①得 $\dfrac{8}{x}=2\Rightarrow x=4$，代入①　∴ $y=3$，故$(x,y)=(4,3)$

11.設 $xyz\neq 0$，$4^x=\sqrt{6^y}=\dfrac{1}{9^z}$，則 $\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{z}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　4

解析　令 $4^x=\sqrt{6^y}=\dfrac{1}{9^z}=k$

$$\therefore \begin{cases}4^x=k\\ \sqrt{6^y}=k\\ \dfrac{1}{9^z}=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4=k^{\frac{1}{x}}\\ 6^{\frac{y}{2}}=k\\ \dfrac{1}{9}=k^{\frac{1}{z}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2=k^{\frac{1}{2x}}\cdots\cdots①\\ 6=k^{\frac{2}{y}}\cdots\cdots②\\ 3=k^{-\frac{1}{2z}}\cdots\cdots③\end{cases}$$

$$①\times③=②\quad\Rightarrow k^{\frac{1}{2x}}\cdot k^{-\frac{1}{2z}}=k^{\frac{2}{y}}\Rightarrow \frac{1}{2x}-\frac{1}{2z}=\frac{2}{y}，故\frac{y}{x}-\frac{y}{z}=4$$

12. 方程式 $2^x+8\cdot 2^{-x}=6$ 之解為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　$x=1$ 或 $x=2$

解析　原式 $\Rightarrow(2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0\Rightarrow(2^x-2)(2^x-4)=0\Rightarrow 2^x=2$ 或 $2^x=4\Rightarrow x=1$ 或 $x=2$

13. 方程式 $2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}+10\cdot 2^{x-2}=12$ 之解為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　3

解析　$2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}+10\cdot 2^{x-2}=12\Rightarrow 2\cdot 2^x-6\cdot 2^x\cdot 2^{-1}+10\cdot 2^x\cdot 2^{-2}=12$

$$\Rightarrow\left(2-\frac{6}{2}+\frac{10}{4}\right)\cdot 2^x=12\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot 2^x=12\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3$$

14.解方程式：

(1) $4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+16=0$，得 $x=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

(2) $10^x-4\cdot 5^x-5\cdot 2^x+20=0$，得 $x=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　(1) 0，2;(2) 1，2

解析　(1)令 $2^x=t$，$t>0\Rightarrow 4t^2-20t+16=0\Rightarrow t=1$或$4$　∴ $2^x=1$或4，$x=0$ 或 2

(2) $5^x\cdot 2^x-4\cdot 5^x-5\cdot 2^x+20=0\Rightarrow(5^x-5)(2^x-4)=0$，$5^x=5$或$2^x=4\Rightarrow x=1$或$x=2$

15.設 $9^{x+1}-3^{x+4}+1=0$ 的二實根為 α，β，則 $\alpha+\beta=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　-2

解析　設 $y=3^x$，則 $9y^2-81y+1=0$ 之二根為 $\begin{cases}y_1=3^\alpha\\ y_2=3^\beta\end{cases}$，$y_1y_2=\dfrac{1}{9}=3^\alpha\cdot 3^\beta$

即 $3^{\alpha+\beta}=3^{-2}$　∴ $\alpha+\beta=-2$

16.設 $a\in\boldsymbol{R}$，若 $4^x-\dfrac{3a+1}{4^x}=3a$ 有實數解，求 a 之範圍為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　$a>-\dfrac{1}{3}$

解析　$(4^x)^2-3a(4^x)-(3a+1)=0\Rightarrow[4^x-(3a+1)](4^x+1)=0$

$4^x=-1$(不合)$\Rightarrow 4^x=3a+1>0\Rightarrow a>-\dfrac{1}{3}$

17.設 $3^a=5^b$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$，則 $3^a+5^b=$ ____________ .

解答 $2\sqrt{15}$

解析 設 $3^a=5^b=k\Rightarrow 3=k^{\frac{1}{a}}$，$5=k^{\frac{1}{b}}$，$15=k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=k^2$，$\therefore\ k=\sqrt{15}\ \Rightarrow 3^a+5^b=\sqrt{15}+\sqrt{15}=2\sqrt{15}$.

18.設 $a=2^x=3^y=5^z$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$，則 $a=$ ____________ .

解答 $\sqrt{30}$

解析 $2^x=a\Rightarrow 2=a^{\frac{1}{x}}\cdots\cdots$①，$3^y=a\Rightarrow 3=a^{\frac{1}{y}}\cdots\cdots$②，$5^z=a\Rightarrow 5=a^{\frac{1}{z}}\cdots\cdots$③，

①×②×③　得 $30=a^{\frac{1}{x}}\times a^{\frac{1}{y}}\times a^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=a^2\Rightarrow a=\pm\sqrt{30}$（負不合）.

19.設 $a>0$ 且 $a^{4x}=\sqrt{29-12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$，則 $\dfrac{a^{6x}+a^{-6x}}{a^{2x}+a^{-2x}}$ 之值爲____________ .

解答 5

解析 $a^{4x}=\sqrt{29-12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{29-12(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=\sqrt{9}-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^{-4x}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow\ \dfrac{a^{6x}+a^{-6x}}{a^{2x}+a^{-2x}}=\dfrac{(a^{2x}+a^{-2x})(a^{4x}-a^{2x}\times a^{-2x}+a^{-4x})}{a^{2x}+a^{-2x}}\ \Leftarrow a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a^{4x}-1+a^{-4x}=(3-2\sqrt{2})-1+(3+2\sqrt{2})=5$.

20.求 $\sqrt{\dfrac{27^{10}+9^{10}}{27^4+9^{11}}}=$ ____________ .

解答 81

解析 $\sqrt{\dfrac{27^{10}+9^{10}}{27^4+9^{11}}}=\sqrt{\dfrac{(3^3)^{10}+(3^2)^{10}}{(3^3)^4+(3^2)^{11}}}=\sqrt{\dfrac{3^{30}+3^{20}}{3^{12}+3^{22}}}=\sqrt{\dfrac{3^{20}(3^{10}+1)}{3^{12}(1+3^{10})}}=\sqrt{3^8}=3^4=81$.

21.方程式 $2(4^x+4^{-x})-7(2^x+2^{-x})+9=0$,

(1)令 $u=2^x+2^{-x}$，則原方程式表成 u 的方程式爲__________ .　(2) x 之解爲__________ .

解答 (1) $2u^2-7u+5=0$;(2) ±1

解析 (1) $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=u^2-2\ \Rightarrow\ 2(u^2-2)-7u+9=0\ \Rightarrow\ 2u^2-7u+5=0$

(2) $(u-1)(2u-5)=0$，$u=1$(不合)或$\dfrac{5}{2}$　($\because\ u\ge 2$) $\Rightarrow\ 2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}\ \Rightarrow\ x=\pm1$

22.若 $a\in\boldsymbol{R}$，且 x 的方程式 $2^{2x}+2a\cdot 2^x+3-2a=0$ 有相異兩實根，則 a 的範圍爲__________ .

解答 $a<-3$

解析 設 $t=2^x$，則方程式化爲 $t^2+2at+(3-2a)=0$

$\because$ x 有兩相異實根 $\Rightarrow$ t 有兩相異正根

$\therefore$ $D = 4a^2 - 4(3-2a) > 0 \Rightarrow (a+3)(a-1) > 0 \Rightarrow a > 1$ 或 $a < -3$…..①

兩根和 $= -2a > 0 \Rightarrow a < 0$……..②

兩根積 $= 3 - 2a > 0 \Rightarrow a < \dfrac{3}{2}$…..③

由①②③$\Rightarrow a < -3$

23.某次實驗中，每經過一天，細菌數目就會增加 2 倍，問：

(1) 2 天後的細菌數是 3 天前的細菌數的__________倍．

(2)若開始時細菌數是 10000 個，n 天後細菌數超過 1280000 個（$n \in \boldsymbol{N}$），則 n 的最小值爲__________．

解答　(1)243;(2)5

解析　(1)每經過一天，細菌數會增加 2 倍，即變爲原來的 3 倍，即經過 n 天變爲原來的 3^n 倍

又 2 天後到 3 天前共經 5 天，所求 $3^5 = 243$ 倍．

(2)$10000 \times 3^n > 1280000 \Rightarrow 3^n > 128$，$\therefore$ $n \ge 5 \Rightarrow n$ 的最小值爲 5．

24.服用藥物需依照醫師指示．若某藥品在服用後 t 小時，在胃內的藥量尚有 $f(t) = 200 \times (0.25)^t$ 公絲，則服藥後 1 小時 30 分時，此藥在胃內的殘存量爲__________公絲．

解答　25

解析　$f(1.5) = 200 \times (0.25)^{1.5}$，而 $(0.25)^{1.5} = [(\dfrac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{8}$，$f(1.5) = 200 \times \dfrac{1}{8} = 25$（公絲）．

25.某食品實驗室混合甲，乙兩種菌類製成一種新食品．調查後發現乙菌個數是甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎．又知道甲菌一日後增加一倍，乙菌增加三倍（成爲原來的四倍）．現在取同數量的甲，乙兩種菌，讓它們同時繁殖，試問至少第__________天後混合甲，乙兩種菌類才能製成受歡迎的食品．

解答　10

解析　設甲菌與乙菌開始均爲 A 個，則 n 天後，

甲菌的數量爲 $A(1+1)^n = A \cdot 2^n$，

乙菌的數量爲 $A(1+3)^n = A \cdot 4^n$，

乙菌總數大於甲菌總數 1000 倍以上時，$A \cdot 4^n > 1000 \cdot A \cdot 2^n$，得 $2^n > 1000$，知 $n \ge 10$．

26.鋼琴的十二平均律理論：用第一條弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第二個音的弦長，將第二條弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第三個音的弦長，以下用相同的方法求得各個音的弦長，設第一個音的弦長爲 1，則第 m 個音的弦長爲 $\dfrac{1}{2}$ 時，m 值爲________．

解答　13

解析　第 m 個音的弦長爲 ℓ_m 時，$\ell_1 = \ell_2 \cdot \sqrt[12]{2}$，得 $\ell_2 = 2^{-\frac{1}{12}}$，

同理 $\ell_3 = (2^{-\frac{1}{12}})^2$，…，知 $\ell_m = (2^{-\frac{1}{12}})^{m-1} = 2^{-\frac{m-1}{12}}$，由 $2^{-\frac{m-1}{12}} = 2^{-1}$，得 $m = 13$．