<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：99.11.24</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-1 指數函數(a)</td><td>班級</td><td>一年____班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題（每題 10 分 ）

1.化簡 $\sqrt[3]{\sqrt[8]{64^{-0.2}}\cdot\sqrt{32}}\cdot\sqrt[3]{8^{-3}}\cdot(\sqrt[4]{\sqrt[3]{16^{-1}}})^{-2}=2^k$，$k=$__________ .

解答　$-\dfrac{31}{20}$

解析　原式 $=[((2^6)^{-0.2})^{\frac{1}{8}}\cdot(2^5)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}\cdot((2^3)^{-3})^{\frac{1}{3}}\cdot(((2^{-4})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}})^{-2}$ $=[2^{-\frac{3}{20}}\cdot 2^{\frac{5}{2}}]^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{47}{60}}\cdot 2^{-3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{31}{20}}$

2.若 $53^x=9$，$477^y=243$，則 $\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=$__________ .

解答　-2

解析　$\begin{cases}53^x=3^2\\477^y=3^5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}53=3^{\frac{2}{x}}\ \cdots\cdots①\\477=3^{\frac{5}{y}}\ \cdots\cdots②\end{cases}$，①÷② 得 $3^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}=\dfrac{53}{477}=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$　$\therefore\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=-2$

3.方程式 $2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}+10\cdot 2^{x-2}=12$ 之解爲__________ .

解答　3

解析　$2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}+10\cdot 2^{x-2}=12\Rightarrow 2\cdot 2^x-6\cdot 2^x\cdot 2^{-1}+10\cdot 2^x\cdot 2^{-2}=12$

$\Rightarrow(2-\dfrac{6}{2}+\dfrac{10}{4})\cdot 2^x=12\Rightarrow\dfrac{3}{2}\cdot 2^x=12\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3$

4.設 $2^x=3^y=216$，則 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 之值爲__________ .

解答　$\dfrac{1}{3}$

解析　$2^x=6^3\Rightarrow 2=6^{\frac{3}{x}}\cdots\cdots①$，$3^y=6^3\Rightarrow 3=6^{\frac{3}{y}}\cdots\cdots②$

①×②得 $6=6^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}}\Rightarrow\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}=1\Rightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$

5.化簡 $(\dfrac{81}{16})^{-0.25}\cdot(\dfrac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}\cdot(0.25)^{-0.5}$ 之值爲__________ .

解答　3

解析　原式 $=(\dfrac{3}{2})^{4\times(-\frac{1}{4})}\cdot(\dfrac{2}{3})^{3\times(-\frac{2}{3})}\cdot(\dfrac{1}{2})^{2\times(-\frac{1}{2})}=(\dfrac{3}{2})^{-1}\cdot(\dfrac{2}{3})^{-2}\cdot(\dfrac{1}{2})^{-1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{2}{1}=3$

6.解 $9^{2x^2}=9\cdot 3^{7x}$，得 $x=$__________ .

解答 $-\frac{1}{4}$ 或 2

解析 原式 $\Rightarrow$ $3^{4x^2}=3^{7x+2}$ $\Rightarrow$ $4x^2-7x-2=0$ $\Rightarrow$ $(4x+1)(x-2)=0$ $\Rightarrow$ $x=-\frac{1}{4}$ 或 2

7.解方程式：

(1) $(\sqrt{3})^{3x+2}=\frac{27\sqrt{3}}{3^x}$，得 $x=$__________ . (2) $3^{x+2}=4^{x+2}$，得 $x=$__________ .

解答 (1) 1;(2) -2

解析 (1) $3^{\frac{3x+2}{2}}=\frac{3^3\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^x}=3^{\frac{7}{2}-x}$ $\Rightarrow$ $\frac{3x+2}{2}=\frac{7}{2}-x\Rightarrow x=1$

(2) $x+2=0$， $x=-2$

8.若方程式 $4^x-3\cdot 2^{x+2}+8=0$ 之兩根爲 α，β，則 $\alpha+\beta=$__________ .

解答 3

解析 $(2^2)^x-3\cdot 2^2\cdot 2^x+8=0\Rightarrow(2^x)^2-12\cdot 2^x+8=0$

設 $t=2^x$，則 $t^2-12t+8=0$ 兩根爲 2^α，2^β

由根與係數關係得 $2^{\alpha+\beta}=2^\alpha\cdot 2^\beta=8=2^3$ $\therefore$ $\alpha+\beta=3$

9.若 $a>0$，且 $a^{3x}+a^{-3x}=18$，則(1) $a^x+a^{-x}=$__________ . (2) $a^x=$__________ .

解答 (1) 3;(2) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

解析 (1)令 $a^x+a^{-x}=t\Rightarrow$ $a^{3x}+a^{-3x}=(a^x+a^{-x})^3-3a^x\cdot a^{-x}(a^x+a^{-x})$

$\Rightarrow$ $18=t^3-3\cdot 1\cdot t$

$\Rightarrow t^3-3t-18=0\Rightarrow(t-3)(t^2+3t+6)=0$

$\because$ $t\in\boldsymbol{R}\Rightarrow t=3$（$t^2+3t+6=0$，判別式$<0$，二根爲虛根不合），即 $a^x+a^{-x}=3$

(2)$a^x+a^{-x}=3$ ，設 $a^x=s\Rightarrow$ $s+\frac{1}{s}=3\Rightarrow s^2+1=3s$

$s^2-3s+1=0\Rightarrow\Rightarrow a^x=s=$ $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

10.設 $a>0$，且 $a^{2x}=3-2\sqrt{2}$，則

(1) $a^{-x}=$__________ . (2) $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=$__________ .

解答 (1) $\sqrt{2}+1$;(2) 5

解析 (1) $a^{2x}=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2\Rightarrow a^x=\sqrt{2}-1$ $\therefore$ $a^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

(2) $a^{2x}=3-2\sqrt{2}$ $\Rightarrow a^{-2x}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

$\therefore$ $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}=6-1=5$

11.設$\sqrt[x]{81}=\sqrt[y]{3^{2y-3}}$，且 $8^{x+4y}=16^{xy}$，則數對$(x,y)=$__________ .

$\boxed{\text{解答}}$ (4,3)

$\boxed{\text{解析}}$ $\sqrt[x]{81}=\sqrt[y]{3^{2y-3}}\Rightarrow 3^{\frac{4}{x}}=3^{\frac{2y-3}{y}}\Rightarrow \dfrac{4}{x}=\dfrac{2y-3}{y}\Rightarrow \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=2$……①

$8^{x+4y}=16^{xy}\Rightarrow 2^{3x+12y}=2^{4xy}\Rightarrow 3x+12y=4xy\Rightarrow \dfrac{12}{x}+\dfrac{3}{y}=4$……②

由② − ①得 $\dfrac{8}{x}=2\Rightarrow x=4$，代入①　∴ $y=3$，故$(x,y)=(4,3)$

12.解方程式：

(1) $4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+16=0\Rightarrow x=$__________ .

(2) $6^x-4\cdot 3^x-3\cdot 2^x+12=0\Rightarrow x=$__________ .

$\boxed{\text{解答}}$ (1) 0，2;(2) 1，2

$\boxed{\text{解析}}$ (1)原式 $\Rightarrow 4\cdot(2^x)^2-20\cdot 2^x+16=0\Rightarrow (2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0\Rightarrow(2^x-1)(2^x-4)=0$

$\Rightarrow 2^x=1$ 或 $2^x=4\Rightarrow x=0$ 或 2

(2)原式 $\Rightarrow 2^x\cdot 3^x-4\cdot 3^x-3\cdot 2^x+12=0\Rightarrow(2^x-4)(3^x-3)=0\Rightarrow 2^x=4$ 或 $3^x=3$

$\Rightarrow x=2$ 或 1

13.方程式 $2^x+8\cdot 2^{-x}=6$ 之解為__________ .

$\boxed{\text{解答}}$ $x=1$ 或 $x=2$

$\boxed{\text{解析}}$ 原式 $\Rightarrow(2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0\Rightarrow(2^x-2)(2^x-4)=0\Rightarrow 2^x=2$ 或 $2^x=4\Rightarrow x=1$ 或 $x=2$

14.在某項實驗中，細菌數 1 日後增加為 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 200,000，$4\frac{1}{2}$日後細菌數為 1,600,000，則(1) a 之值為__________ .　(2)細菌數為 3,200,000，所需日數為__________日 .

$\boxed{\text{解答}}$ (1) 4;(2) 5

$\boxed{\text{解析}}$ (1)設實驗開始時，細菌數為 A 個，則

3 日後之細菌數為 $A\cdot a^3=200000$……①

$4\frac{1}{2}$日後之細菌數為 $A\cdot a^{4\frac{1}{2}}=1600000$……②

由$\dfrac{\text{②}}{\text{①}}$得 $a^{\frac{3}{2}}=8\Rightarrow a=4$.

(2)∵ $a=4$　∴ $A\cdot 4^3=200000\Rightarrow A=3125$，設所需日數為 k 日，

故 $3125\times 4^k=3200000\Rightarrow 4^k=1024\Rightarrow k=5$，故需 5 日 .

15.設 $a\in\boldsymbol{R}$，若 $4^x-\dfrac{3a+1}{4^x}=3a$ 有實數解，求 a 之範圍為__________ .

解答 $a>-\frac{1}{3}$

解析 $(4^x)^2-3a(4^x)-(3a+1)=0\Rightarrow[4^x-(3a+1)](4^x+1)=0$

$4^x=-1$(不合)$\Rightarrow 4^x=3a+1>0\Rightarrow a>-\frac{1}{3}$

16.設 x，$y\in\boldsymbol{R}$，$x+y=5$，且 $3^x-3^y=18$，$3^x+3^y=k$，

(1)以 k 表 $3^x=$__________． (2)以 k 表 $3^y=$__________． (3) k 值爲__________．

解答 (1)$\frac{k+18}{2}$;(2)$\frac{k-18}{2}$;(3)36

解析 (1)$\begin{cases}3^x-3^y=18\cdots\cdots① \\ 3^x+3^y=k\cdots\cdots②\end{cases}$，①＋② $\Rightarrow$ $2\cdot3^x=k+18$ $\Rightarrow$ $3^x=\frac{k+18}{2}\cdots\cdots$ ③

(2)②－① $\Rightarrow$ $2\cdot3^y=k-18$ $\Rightarrow$ $3^y=\frac{k-18}{2}\cdots\cdots$ ④

(3)③×④ $\Rightarrow$ $3^{x+y}=\frac{k^2-18^2}{4}$ $\Rightarrow$ $k=36$ （$\because$ $k>0$）

17.設 $t\in\boldsymbol{R}$，$2^{2x}-t\cdot2^{x+1}-2t+3=0$ 有相異二實根，求 t 之範圍爲__________．

解答 $1<t<\frac{3}{2}$

解析 $(2^x)^2-2t\cdot2^x-(2t-3)=0$，設 $2^x=y$ $\therefore$ $y^2-2ty-(2t-3)=0$ 有相異二正根

$\therefore$ 判別式 $\Delta=4t^2+4(2t-3)>0\Rightarrow(t+3)(t-1)>0\Rightarrow t<-3$ 或 $t>1$…..①

二根之和 $=2t>0\Rightarrow t>0$……②,

二根之積 $=-(2t-3)>0\Rightarrow 2t-3<0\Rightarrow t<\frac{3}{2}$…..③

由①②③，故 $1<t<\frac{3}{2}$

18.設 $a=\sqrt[5]{(\frac{1}{3})^2}$，$b=\frac{1}{\sqrt[7]{27}}$，$c=\sqrt[5]{9^{-2}}$，$d=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{81}}}$，試比較 a，b，c，d 的大小順序爲____________．

解答 $a>b>d>c$

解析 $a=\sqrt[5]{(\frac{1}{3})^2}=(\frac{1}{3})^{\frac{2}{5}}=3^{-\frac{2}{5}}$，$b=\frac{1}{\sqrt[7]{27}}=\frac{1}{\sqrt[7]{3^3}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{7}}}=3^{-\frac{3}{7}}$，$c=\sqrt[5]{9^{-2}}=\sqrt[5]{3^{-4}}=3^{-\frac{4}{5}}$，

$d=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{81}}}=((\frac{1}{81})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{4}{6}}=3^{-\frac{2}{3}}$，$\because 3>1$ 且 $-\frac{4}{5}<-\frac{2}{3}<-\frac{3}{7}<-\frac{2}{5}$，

$\therefore 3^{-\frac{4}{5}}<3^{-\frac{2}{3}}<3^{-\frac{3}{7}}<3^{-\frac{2}{5}}$ $\Rightarrow c<d<b<a$．

19.小熹練習英文打字，經過 t 週的練習後，平均每分鐘可打 $144\times(1-2^{-0.3t})$ 個字．試問經過 10 週的練習後，小熹平均每分鐘可打____________個字

解答 126

解析 將 $t=10$ 代入函數中，得 $144\times(1-2^{-3})=144\times(1-\frac{1}{8})=126$（字）．

20.服用藥物需依照醫師指示．若某藥品在服用後 t 小時，在胃內的藥量尚有 $f(t)=200\times(0.25)^t$ 公絲，則服藥後 1 小時 30 分時，此藥在胃內的殘存量爲____________公絲．

解答 25

解析 $f(1.5)=200\times(0.25)^{1.5}$，而 $(0.25)^{1.5}=[(\frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$， $f(1.5)=200\times\frac{1}{8}=25$（公絲）．

221.某食品實驗室混合甲，乙兩種菌類製成一種新食品．調查後發現乙菌個數是甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎．又知道甲菌一日後增加一倍，乙菌增加三倍（成爲原來的四倍）．現在取同數量的甲，乙兩種菌，讓它們同時繁殖，試問至少第____________天後混合甲，乙兩種菌類才能製成受歡迎的食品．

解答 10

解析 設甲菌與乙菌開始均爲 A 個，則 n 天後，

甲菌的數量爲 $A(1+1)^n=A\cdot 2^n$，

乙菌的數量爲 $A(1+3)^n=A\cdot 4^n$，

乙菌總數大於甲菌總數 1000 倍以上時，

$A\cdot 4^n>1000\cdot A\cdot 2^n$，得 $2^n>1000$，知 $n\geq 10$．

23.鋼琴的十二平均律理論：用第一條弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第二個音的弦長，將第二條弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第三個音的弦長，以下用相同的方法求得各個音的弦長，設第一個音的弦長爲 1，則第 m 個音的弦長爲 $\frac{1}{2}$ 時，m 值爲______．

解答 13

解析 第 m 個音的弦長爲 ℓ_m 時， $\ell_1=\ell_2\cdot\sqrt[12]{2}$，得 $\ell_2=2^{-\frac{1}{12}}$，

同理 $\ell_3=(2^{-\frac{1}{12}})^2$，…，知 $\ell_m=(2^{-\frac{1}{12}})^{m-1}=2^{-\frac{m-1}{12}}$，由 $2^{-\frac{m-1}{12}}=2^{-1}$，得 $m=13$．