

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.11.17				
範圍	2-3~4 方程式(3)、 不等式	班級	一年__班	姓名
		座號		

一、填充題 (每題 10 分)

1. 設 $x^2 - 2x - k = 0$ ，無實數解，試求 k 範圍_____。

解答 $k < -1$

解析 $D < 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) < 0 \Rightarrow 4k + 4 < 0 \Rightarrow k < -1$

2. 若 $(2-i)x^2 - 3(1-i)x - 2(1+i) = 0$ 有實數解，求另一虛根為_____。

解答 $-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

解析 設方程式之實根為 α ，則 $(2-i)\alpha^2 - 3(1-i)\alpha - 2(1+i) = 0$

$$\Rightarrow (2\alpha^2 - 3\alpha - 2) + (-\alpha^2 + 3\alpha - 2)i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0 \\ (\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \text{ 或 } 2 \\ \alpha = 1 \text{ 或 } 2 \end{cases} \therefore \alpha = 2$$

$$\text{設另一根為 } \beta, \text{ 則 } 2 + \beta = \frac{3(1-i)}{2-i} = \frac{3}{5}(3-i) \Rightarrow \beta = \frac{3}{5}(3-i) - 2 = \frac{-1-3i}{5}$$

3. $f(x), g(x)$ 為實係數多項式，若 $f(1+2i) = 3-4i$ ， $g(3-4i) = 1+2i$ ，求 $f(1-2i) \times g(3+4i) =$ _____。

解答 $11-2i$

解析 $f(1-2i) \times g(3+4i) = \overline{f(1+2i)} \times \overline{g(3-4i)} = \overline{f(1+2i)} \times \overline{g(3-4i)}$
 $= \overline{(3-4i)} \times \overline{(1+2i)} = (3+4i)(1-2i) = 11-2i$

4. 設 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，則化簡 $(1+\omega)^6 + (1+\omega^2)^6 + (\omega+\omega^2)^6$ 之值為_____。

解答 3

解析 $\therefore \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \therefore \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$\therefore (1+\omega)^6 + (1+\omega^2)^6 + (\omega+\omega^2)^6 = (-\omega^2)^6 + (-\omega)^6 + (-1)^6$$

$$= \omega^{12} + \omega^6 + 1 = (\omega^3)^4 + (\omega^3)^2 + 1 = 3$$

5. $a, b \in \mathbf{R}$ ， $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，若 $\frac{1}{2-\omega} = a + b\omega$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

解答 $(\frac{3}{7}, \frac{1}{7})$

解析 $\therefore \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \therefore \omega^3 = 1 \text{ 且 } 1 + \omega + \omega^2 = 0$

$$\text{又 } \frac{1}{2-\omega} = a + b\omega \Rightarrow \frac{1}{2-\omega} = \frac{4+2\omega+\omega^2}{(2-\omega)(4+2\omega+\omega^2)} = \frac{(\omega^2 + \omega + 1) + \omega + 3}{2^3 - \omega^3}$$

$$= \frac{\omega + 3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{1}{7}\omega \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{7} \\ b = \frac{1}{7} \end{cases}$$

6. 設複數 z 的實數部分為正，且滿足 $z^2 = 3 - 4i$, $i = \sqrt{-1}$, $z =$ _____ .

解答 $2 - i$

解析 設 $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a > 0$, $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & \dots\dots ① \\ ab = -2 & \dots\dots ② \end{cases} \quad \text{由②知 } b = \frac{-2}{a} \text{ 代入①}$$

$$a^2 - \left(\frac{-2}{a}\right)^2 = 3 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \Rightarrow (a^2 - 4)(a^2 + 1) = 0$$

$$\therefore a = 2 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = a + bi = 2 - i$$

7. 設 $m, k \in \mathbf{Q}$, $m \neq 0$, 且方程式 $2mx^2 - 3mx + 2x + m + k = 0$ 之根為有理數，則有理數 $k =$ _____ .

解答 -1 或 -2

解析 \because 方程式 $2mx^2 - 3mx + 2x + m + k = 0$ 之根為有理數

$\therefore (-3m + 2)^2 - 4 \cdot 2m(m + k) = 9m^2 - 12m + 4 - 8m^2 - 8mk = m^2 - 2(6 + 4k)m + 4$ 為完全平方式

$$\Rightarrow (6 + 4k)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (6 + 4k + 2)(6 + 4k - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (k + 2)(k + 1) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 或 } k = -2$$

8. 設 α, β 為方程式 $x^2 + 8x + 6 = 0$ 的兩根，求

(1) $\alpha^2 + \beta^2 =$ _____ . (2) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} =$ _____ . (3) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} =$ _____ .

解答 (1) 52; (2) $\frac{26}{3}$; (3) $\frac{13}{9}$

解析 $\alpha + \beta = -8$, $\alpha\beta = 6$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-8)^2 - 2 \times 6 = 52$$

$$(2) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{52}{6} = \frac{26}{3}$$

$$(3) \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{52}{6^2} = \frac{13}{9}$$

9. 若 α, β 為方程式 $x^2 + 7x + 9 = 0$ 之兩根，求

(1) $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 =$ _____ . (2) $(\alpha^2 + 10\alpha + 1)(\beta^2 + 10\beta + 1) =$ _____ .

解答 (1) -1 ; (2) 313

解析 $\begin{cases} \alpha + \beta = -7 < 0 \\ \alpha\beta = 9 > 0 \end{cases}$ 且 $D = 7^2 - 4 \times 1 \times 9 > 0 \Rightarrow \alpha < 0$ 且 $\beta < 0$

$$(1) (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + (\sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = -7 + 2\sqrt{9} = -1$$

$$(2) \because \alpha, \beta \text{ 為 } x^2 + 7x + 9 = 0 \text{ 之兩根} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 7\alpha + 9 = 0 \\ \beta^2 + 7\beta + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = -7\alpha - 9 \\ \beta^2 = -7\beta - 9 \end{cases}$$

$$\therefore (\alpha^2 + 10\alpha + 1)(\beta^2 + 10\beta + 1) = [(\alpha^2 + 7\alpha + 9) + 3\alpha - 8][(\beta^2 + 7\beta + 9) + 3\beta - 8] \\ = (3\alpha - 8)(3\beta - 8) = 9\alpha\beta - 24(\alpha + \beta) + 64$$

$$= 9 \times 9 - 24 \times (-7) + 64 = 313$$

10. 若 $x^4 + kx^3 - 2x^2 + (k+3)x - 2$ 有一次因式，求整數 $k =$ _____ .

解答 0 或 -3

解析 可能的一次因式為 $x \pm 1$, $x \pm 2$

(1) 若一次因式為 $x-1 \Rightarrow 1+k-2+(k+3)-2=0 \Rightarrow k=0$

(2) 若一次因式為 $x+1 \Rightarrow 1-k-2-(k+3)-2=0 \Rightarrow k=-3$

(3) 若一次因式為 $x-2 \Rightarrow 16+8k-8+2(k+3)-2=0 \Rightarrow k=-\frac{6}{5}$ (不合)

(4) 若一次因式為 $x+2 \Rightarrow 16-8k-8-2(k+3)-2=0 \Rightarrow k=0$

故 $k=0$ 或 -3

11. 設 $a, b \in R$, 若 $x^4 - x^3 + ax^2 + 7x + b = 0$ 有一根為 $1+2i$, 則 $a+b =$ _____ .

解答 -3

解析 此方程式為實係數方程式，有一根 $1+2i$, 必有另一根 $1-2i$

$\therefore [x - (1+2i)][x - (1-2i)] = x^2 - 2x + 5$ 為 $x^4 - x^3 + ax^2 + 7x + b = 0$ 之因式

$$\begin{array}{r} 1+1-1 \\ 1-2+5 \overline{) 1-1 \quad +a \quad +7+b} \\ \underline{1-2 \quad +5} \\ 1+(a-5)+7+b \\ \underline{1- \quad 2 \quad +5} \\ (a-3)+2+b \\ \underline{-1 \quad +2-5} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore a-3=-1, b=-5 \Rightarrow a=2, b=-5$, 故 $a+b=2+(-5)=-3$

12. 已知方程式 $x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x - 2a = 0$ 在 -2 與 -1 之間， 1 與 2 之間都恰有一個實根，則實數 a 的範圍為 _____ .

解答 $2 < a < 3$

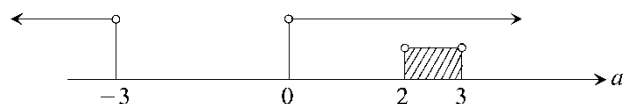
解析 令 $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x - 2a$

因 $f(x) = 0$ 在 -2 與 -1 之間， 1 與 2 之間都恰有一實根

由勘根定理知 $f(-2)f(-1) < 0$ 且 $f(1)f(2) < 0$

$\therefore (-10a+30)(-3a+6) < 0$ 且 $(-a)(6a+18) < 0$

$\Rightarrow (a-3)(a-2) < 0$ 且 $a(a+3) > 0 \Rightarrow 2 < a < 3$ 且 $(a < -3$ 或 $a > 0) \Rightarrow 2 < a < 3$



13. 求方程式 $6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$ 的所有有理根 _____ .

解答 $\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}$

解析 設 $\frac{q}{p}$ 為有理根，則 $p|6, q|1 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, q = \pm 1$

則 $\frac{q}{p}$ 可為 $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$ ，而檢驗得 $f(\frac{1}{2})=0, f(\frac{-1}{3})=0$ ，故有理根為 $\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}$

14. 整係數方程式 $x^4 - 5x^3 + mx^2 + nx + 14 = 0$ 有四相異有理根，則最大根為_____。

解答 7

解析 利用有理根檢驗法；若有有理根 $\frac{q}{p}$ ，則 $p \mid 1$ 且 $q \mid 14$ ，即 $p = \pm 1, q = \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$

設四相異有理根為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$

$$\text{又} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ \alpha\beta\gamma\delta = 14 \end{cases} \therefore \text{四根為 } 1, -1, -2 \text{ 及 } 7, \text{ 最大根為 } 7$$

15. 設 α, β, γ 為 $x^3 - 6x^2 + 11x - 7 = 0$ 的三根，則

(1) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 =$ _____。 (2) $(\alpha + \beta - 7)(\beta + \gamma - 7)(\gamma + \alpha - 7) =$ _____。

解答 (1) 39; (2) -25

解析 (1) 已知 $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 6 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11 \\ \alpha\beta\gamma = 7 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)] \\ \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 21 &= 6 \times (36 - 33), \text{ 得 } \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \because \alpha + \beta + \gamma &= 6 \therefore \alpha + \beta = 6 - \gamma, \beta + \gamma = 6 - \alpha, \gamma + \alpha = 6 - \beta \\ \text{則 } (\alpha + \beta - 7)(\beta + \gamma - 7)(\gamma + \alpha - 7) &= (6 - \gamma - 7)(6 - \alpha - 7)(6 - \beta - 7) \\ &= -(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = -[\alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1] \\ &= -(7 + 11 + 6 + 1) = -25 \end{aligned}$$

16. 解下列不等式：

(1) $-2x^2 + 5x + 12 < 0$ ， x 的範圍為_____。

(2) $x^2 + x - 3 \leq 0$ ， x 的範圍為_____。

(3) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ ， x 的範圍為_____。

(4) $4x^2 - 12x + 9 > 0$ ， x 的範圍為_____。

解答 (1) $x > 4$ 或 $x < \frac{-3}{2}$; (2) $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$; (3) $x = -2$; (4) $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3}{2}$

解析 (1) 原式 $\Rightarrow 2x^2 - 5x - 12 > 0 \Rightarrow (x - 4)(2x + 3) > 0 \Rightarrow x > 4$ 或 $x < \frac{-3}{2}$

(2) 若 $x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ ，故 $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

(3) 原式 $\Rightarrow (x + 2)^2 \leq 0 \Rightarrow x = -2$

(4) 原式 $\Rightarrow (2x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3}{2}$

17. 不等式 $(x + 3)^{99} \cdot (x - 2)^{2010} \cdot (x - 5)^{11} < 0$ 的解為_____。

解答 $-3 < x < 5$ 且 $x \neq 2$

解析 $(x + 3)^{99}(x - 2)^{2010}(x - 5)^{11} < 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2)^2(x - 5) < 0$

(1) $x - 2 \neq 0$

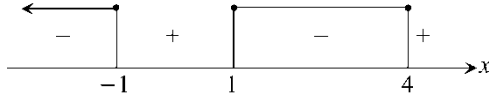
(2) $\therefore (x - 2)^2 > 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 5) < 0 \therefore -3 < x < 5$

由(1)(2)交集得 $-3 < x < 5, x \neq 2$ 為所求

18. 不等式 $(x + 1)(x - 1)(4 - x)^3 \geq 0$ 的解為_____ .

解答 $x \leq -1$ 或 $1 \leq x \leq 4$

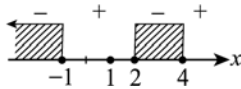
解析 $(x + 1)(x - 1)(4 - x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)[- (x - 4)]^3 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(x - 4)^3 \leq 0$
 $\Rightarrow x \leq -1$ 或 $1 \leq x \leq 4$



19. 試解不等式 $(x - 1)^2(2 - x)^3(x^2 - 3x - 4) \geq 0$ 的範圍為_____ .

解答 $x \leq -1$ 或 $2 \leq x \leq 4$ 或 $x = 1$

解析 原式 $\Rightarrow (x - 1)^2(x - 2)^3(x - 4)(x + 1) \leq 0$
 $\Rightarrow 2 \leq x \leq 4$ 或 $x \leq -1$ 或 $x = 1$



20. 不等式 $(2 + x)(3 - x)(x^2 - x + 2)(x^2 - x - 1) > 0$ 的解為_____ .

解答 $-2 < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < 3$

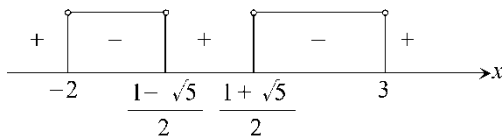
解析 先將各項領導係數化為正

$(2 + x)(3 - x)(x^2 - x + 2)(x^2 - x - 1) > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3)(x^2 - x + 2)(x^2 - x - 1) < 0$
 因 $x^2 - x + 2 > 0$ 恆成立 ($\because D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$)

且 $x^2 - x - 1 = (x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$

原式為 $(x + 2)(x - 3)(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}) < 0$

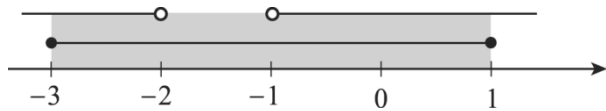
$\therefore -2 < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < 3$



21. 解 $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 3x + 2 > 0 \end{cases}$, x 的範圍為_____ .

解答 $-3 \leq x < -2$ 或 $-1 < x \leq 1$

解析 原式 $\Rightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 1) \leq 0 \\ (x + 1)(x + 2) > 0 \end{cases}$ 如下圖

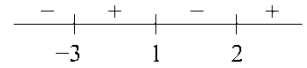


故 $-3 \leq x < -2$ 或 $-1 < x \leq 1$

22. 不等式 $\frac{x-2}{(x-1)(x+3)} \geq 0$ 之解為_____。

解答 $-3 < x < 1$ 或 $x \geq 2$

解析 $\because \frac{x-2}{(x-1)(x+3)} \geq 0$



$\therefore (x-1)(x+3)(x-2) \geq 0, x \neq 1$ 且 $x \neq -3$ 故 $-3 < x < 1$ 或 $x \geq 2$

23. 不等式 $\frac{2x}{x-1} \leq x+2$ 的解為_____。

解答 $-1 \leq x < 1$ 或 $x \geq 2$

解析 $\frac{2x}{x-1} \leq x+2 \Rightarrow \frac{2x}{x-1} - (x+2) \leq 0 \Rightarrow \frac{2x - (x+2)(x-1)}{x-1} \leq 0$

$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow (x^2 - x - 2)(x-1) \geq 0, \text{ 但 } x \neq 1$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)(x-1) \geq 0, \text{ 但 } x \neq 1$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ 或 $x \geq 2, \text{ 但 } x \neq 1$ 得 $-1 \leq x < 1$ 或 $x \geq 2$

24. 若 x 為正整數，滿足 $\frac{(x-1)(x+1)^2(x^2-3x-4)}{x^2-x+1} < 0$ ，則 $x =$ _____。

解答 2 或 3

解析 $\because x^2 - x + 1 > 0$ 恆成立，

$\Rightarrow (x-1)(x+1)^2(x^2-3x-4) < 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)^2(x-4)(x+1) < 0$

$\Rightarrow x < -1$ 或 $1 < x < 4 \therefore x = 2$ 或 3

25. 若 $ax^2 - 2ax + (2a-3) \leq 0$ 無實數解，求實數 a 的範圍為_____。

解答 $a > 3$

解析 $ax^2 - 2ax + (2a-3) \leq 0$ 無實數解 \Rightarrow 所有實數解都使得 $ax^2 - 2ax + (2a-3) > 0$ (恆為正數)

$\begin{cases} a > 0 \\ D = (-2a)^2 - 4 \times a \times (2a-3) < 0 \Rightarrow a > 3 \text{ 或 } a < 0 \end{cases} \Rightarrow a > 3$

26. 設 $y = x^2 - 2ax + a$ 的圖形恆在 $y = -2$ 的圖形上方，則實數 a 的範圍為_____。

解答 $-1 < a < 2$

解析 $x^2 - 2ax + a > (-2)$ 恆成立， $\therefore D = a^2 - (a+2) = (a-2)(a+1) < 0 \therefore -1 < a < 2$

27. 設對任何實數 x ，不等式 $\frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 恆成立，則實數 k 的範圍為_____。

解答 $1 < k < 3$

解析 \because 分母 $4x^2 + 6x + 3 > 0$ 恆成立 ($\because D = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -12 < 0$)

$\therefore \frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 恆成立 $\Rightarrow 2x^2 + 2kx + k < 4x^2 + 6x + 3$ 恆成立

$\Rightarrow 2x^2 + 2(3-k)x + 3-k > 0$ 恆成立 $\Rightarrow (3-k)^2 - 2(3-k) < 0$ (判別式 < 0)

$$\Rightarrow k^2 - 4k + 3 < 0 \Rightarrow (k-1)(k-3) < 0 \Rightarrow 1 < k < 3$$

28. 若 $x-1$ 為 $f(x) = x^4 + kx^3 + 2x^2 + x - 6$ 的因式，則 $f(x) \geq 0$ 之解為_____。

解答 $x \geq 1$ 或 $x \leq -2$

解析 $x-1$ 為 $f(x) = x^4 + kx^3 + 2x^2 + x - 6$ 的因式 $\Rightarrow f(1) = 1 + k + 2 + 1 - 6 = 0 \Rightarrow k = 2$

$$\therefore f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 6 = (x-1)(x^3 + 3x^2 + 5x + 6) = (x-1)(x+2)(x^2 + x + 3)$$

$$\therefore x^2 + x + 3 > 0 \text{ 恆成立} \therefore f(x) \geq 0 \text{ 之解為 } (x-1)(x+2) \geq 0 \quad \text{即 } x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -2$$

29. 設 a, b 為常數，若 $ax^2 + 5x + b > 0$ 的解為 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ ，則 $a+b$ 的值為_____。

解答 -7

解析 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ 為 $(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) < 0 \Leftrightarrow (3x-1)(2x-1) < 0$ 的解

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 < 0$$

$$\text{又 } ax^2 + 5x + b > 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 5x - 1 > 0 \quad \therefore a = -6, b = -1$$

30. 設 $f(x)$ 為二次函數且不等式 $f(x) > 0$ 的解為 $-2 < x < 4$ ，則 $f(2x) < 0$ 的解為_____。

解答 $x > 2$ 或 $x < -1$

解析 $-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$$\text{因為 } f(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 > 0$$

$$\text{設 } f(x) = -x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f(2x) = -(2x)^2 + 2(2x) + 8 = -4x^2 + 4x + 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ 或 } x < -1$$

31. 已知三次函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 之圖形如下圖所示，則不等式 $f(x-1) < 0$ 的解為_____。

解答 $x < -1$ 或 $1 < x < 3$

解析 由圖知： $f(x)$ 的圖形交 x 軸於 $-2, 0, 2$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x(x+2)(x-2) = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$$

$$\therefore f(x-1) < 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore x < -1 \text{ 或 } 1 < x < 3$$

