高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.11.10					
範圍	2-3 多項方程式(2)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. 設 $z_1 = 2 + 4i$，$z_2 = 3 + i$，試求 $\frac{z_1}{z_2}$ 的共軛複數爲____________．

解答 $1 - i$

解析 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+4i}{3+i} = \frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{10+10i}{9-(-1)} = 1 + i$，所求=$\overline{1+i} = 1 - i$

2. 若$(2 - i)x^2 - 3(1 - i)x - 2(1 + i) = 0$ 有實數解，求另一虛根爲____________．

解答 $-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

解析 設方程式之實根爲 α，則$(2 - i)\alpha^2 - 3(1 - i)\alpha - 2(1 + i) = 0$

$\Rightarrow (2\alpha^2 - 3\alpha - 2) + (-\alpha^2 + 3\alpha - 2)i = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2\alpha+1)(\alpha-2) = 0 \\ (\alpha-1)(\alpha-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \text{或} 2 \\ \alpha = 1 \text{或} 2 \end{cases} \quad \therefore \alpha = 2$

設另一根爲 β，則 $2 + \beta = \frac{3(1-i)}{2-i} = \frac{3}{5}(3 - i) \Rightarrow \beta = \frac{3}{5}(3 - i) - 2 = \frac{-1-3i}{5}$

3. x，$y \in \boldsymbol{R}$，若$(x + yi)^2 = -8 - 6i$，則數對$(x$，$y) =$____________．

解答 $(1，-3)$或$(-1，3)$

解析 $\because (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i = -8 - 6i$，$\therefore \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ xy = -3 \end{cases}$

由 $y = -\frac{3}{x}$ 代入 $x^2 - y^2 = -8 \quad \therefore x^2 - (-\frac{3}{x})^2 = -8 \Rightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

$\therefore (x^2 - 1)(x^2 + 9) = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ 或 $x^2 = -9$（不合），

$\therefore x = 1$，$y = -3$ 或 $x = -1$，$y = 3 \quad z = 1 - 3i,\ -1 + 3i$

4. 設 $m, k \in \boldsymbol{Q}, m \neq 0$，且方程式 $2mx^2 - 3mx + 2x + m + k = 0$ 之根爲有理數，則有理數 $k =$__________．

解答 -1 或 -2

解析 $\because$ 方程式 $2mx^2 - 3mx + 2x + m + k = 0$ 之根爲有理數

$\therefore (-3m + 2)^2 - 4 \cdot 2m(m + k) = 9m^2 - 12m + 4 - 8m^2 - 8mk = m^2 - 2(6 + 4k)m + 4$ 爲完全平方式

$\Rightarrow (6 + 4k)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (6 + 4k + 2)(6 + 4k - 2) = 0$

$\Rightarrow (k + 2)(k + 1) = 0 \quad \therefore k = -1$ 或 $k = -2$

5. 方程式 $6x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 4x - 4 = 0$ 之有理根爲__________．

解答 $-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$

解析 設 $ax - b$ 爲其整係數一次因式，$(a，b) = 1$，則 $a \mid 6$，$b \mid -4$

$\therefore$ $\dfrac{b}{a}$之可能值爲± 1，± 2，± 4，$\pm\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{1}{3}$，$\pm\dfrac{2}{3}$，$\pm\dfrac{4}{3}$，$\pm\dfrac{1}{6}$，利用綜合除法

$$
\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 6 & +5 & +9 & -4 & -4 & \underline{-1} \\
 & & -3 & -1 & -4 & +4 & \ \ 2 \\
\hline
2 & 6 & +2 & +8 & -8 & 0 & \\
 & 3 & +1 & +4 & -4 & & \underline{2} \\
 & & +2 & +2 & +4 & & 3 \\
\hline
3 & 3 & +3 & +6 & 0 & & \\
\hline
 & 1 & +1 & +2 & & &
\end{array}
$$

$\therefore$ 有理根爲$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$

6. 已知三次方程式 $x^3+x^2-4x+6=0$, 其中一複數根爲 $1+i$, 求其他各根爲__________ .（有兩個）

解答 $1-i$，-3

解析 實係數方程式有一根 $1+i$，必有共軛虛根 $1-i$，

$x=1\pm i \Rightarrow x-1=\pm i \Rightarrow (x-1)^2=(\pm i)^2 \Rightarrow x^2-2x+2=0$

由除法原理可知 $x^3+x^2-4x+6=0 \Rightarrow (x^2-2x+2)(x+3)=0$

$\therefore$ 另二根爲 $1-i$ 及 -3

7. 設 a，$b\in R$，若 $x^4-x^3+ax^2+7x+b=0$ 有一根爲 $1+2i$，則 $a+b=$__________ .

解答 -3

解析 此方程式爲實係數方程式，有一根 $1+2i$，必有另一根 $1-2i$

$\therefore$ $[x-(1+2i)][x-(1-2i)]=x^2-2x+5$ 爲 $x^4-x^3+ax^2+7x+b=0$ 之因式

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+1-1 \\
\hline
1-2+5 & 1-1\quad +a\quad +7+b \\
 & \underline{1-2\quad +5} \\
 & \quad 1+(a-5)+7+b \\
 & \quad \underline{1-\quad 2\quad +5} \\
 & \qquad (a-3)+2+b \\
 & \qquad \underline{-1\quad +2-5} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\therefore$ $a-3=-1$，$b=-5$ $\Rightarrow$ $a=2$，$b=-5$，故 $a+b=2+(-5)=-3$

8. 設 k 爲負整數，若 $f(x)=x^4-2x^3+x^2+kx-3$ 有整係數一次因式，求 k 之值__________ .

解答 -11

解析 設 $f(x)$的整係數一次因式爲 $ax-b$，則 $a\,|\,1$，$b\,|\,-3$，則 $ax-b$ 可爲 $x\pm 1$，$x\pm 3$

(1) $x+1\,|\,f(x)$ $\Rightarrow$ $f(-1)=0$ $\Rightarrow$ $1+2+1-k-3=0$ $\Rightarrow$ $k=1$（不合）

(2) $x-1\,|\,f(x)$ $\Rightarrow$ $f(1)=0$ $\Rightarrow$ $1-2+1+k-3=0$ $\Rightarrow$ $k=3$（不合）

(3) $x+3\,|\,f(x)$ $\Rightarrow$ $f(-3)=0$ $\Rightarrow$ $81+54+9-3k-3=0$ $\Rightarrow$ $k=47$（不合）

(4) $x-3\,|\,f(x)$ $\Rightarrow$ $f(3)=0$ $\Rightarrow$ $81-54+9+3k-3=0$ $\Rightarrow$ $k=-11$

故 $k=-11$

9. k 爲整數，且 $x^4 - x^3 + kx^2 - 2kx - 2 = 0$ 有有理根，求 $k =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　0，-2

解析　所有可能的有理根爲±1，±2

(1)若 1 爲其根 $\Rightarrow$ $1-1+k-2k-2=0$ $\Rightarrow$ $k=-2$

(2)若 -1爲其根 $\Rightarrow$ $1+1+k+2k-2=0$ $\Rightarrow$ $k=0$

(3)若 2 爲其根 $\Rightarrow$ $16-8+4k-4k-2=0$ $\Rightarrow$ $6=0$，k 無解

(4)若 -2 爲其根 $\Rightarrow$ $16+8+4k+4k-2=0$ $\Rightarrow$ $k=-\frac{22}{8}$（不合）

故 $k=0$，-2

10.求含有-2 及 i 兩根的最低次實係數方程式：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　$x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$

解析　$(x+2)(x-i)(x+i)=0$ $\Rightarrow$ $(x+2)(x^2+1)=0$ $\Rightarrow$ $x^3+2x^2+x+2=0$

11.若一四次有理係數方程式有 $2-\sqrt{3}$ 及 $1-i$ 兩根，則此方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 2 = 0$

解析　四次有理數係數方程式有 $2-\sqrt{3}$ 及 $1-i$ 兩根，必有另兩根 $2+\sqrt{3}$ 及 $1+i$

$\therefore$ 此方程式爲$[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})][x-(1-i)][x-(1+i)]$

即$[(x-2)^2-(\sqrt{3})^2][(x-1)^2-(i)^2]=(x^2-4x+1)(x^2-2x+2)=x^4-6x^3+11x^2-10x+2$

則此方程式爲 $x^4-6x^3+11x^2-10x+2=0$

12.若 $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$，已知 $f(x)=0$ 有一根爲 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$，又 $a+bi$ 亦爲其根（$a<0$，$b\neq 0$），則數對$(a，b)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　$(-\frac{1}{2}，\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$

解析　$\because$ $(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2})(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2})=x^2-x+1$

又 $f(x)=(x^2-x+1)(x^3+2x^2+2x+1)$ (除法原理)$\Rightarrow$ $f(x)=(x^2-x+1)(x+1)(x^2+x+1)$

$\therefore$ $f(x)=0$ 之五根爲 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$，-1，$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ $\therefore$ $(a，b)=(-\frac{1}{2}，\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$

13.設整係數方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有四個相異有理根，則其最大根爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　2

解析　設四個相異有理根爲$\alpha,\beta,\gamma,\delta$，整係數方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$

$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0 \Rightarrow x^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha\beta\gamma\delta=0$

由根與係數得$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$，$\alpha\beta\gamma\delta=10$ $\Rightarrow$四相異有理根爲$-1,1,2,-5$，最大 2.

14. a，b 爲有理數，若$1-\sqrt{2}$ 爲 $x^4+ax^3-6x^2+bx+1=0$ 之一根，求(1) $(a,b)=$＿＿＿＿. (2)所有根＿＿＿.

解答　(1) $(0,0)$；(2) $1\pm\sqrt{2}$，$-1\pm\sqrt{2}$

解析　(1)$\because$方程式爲有理係數方程式 $\therefore$一根$1-\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ 另一根$1+\sqrt{2}$，

故 $[x-(1-\sqrt{2})][x-(1+\sqrt{2})]=x^2-2x-1$ 爲原式之因式．

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 1+(a+2)- & & 1 & \\
\hline
1-2-1 & 1+ & a- & 6+ & b+1 \\
 & 1- & 2- & 1 & \\
\hline
 & & (a+2)- & 5+ & b \\
 & & (a+2) & +(-2a-4)+ & (-a-2) \\
\hline
 & & & (2a-1)+ & (b+a+2)+1 \\
 & & & - & 1+ \quad 2+1 \\
\hline
 & & & 2a+ & (b+a)+0
\end{array}
$$

$\therefore a=0$， $b=0$

(2)原式爲 $(x^2-2x-1)(x^2+2x-1)=0$

$x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$；

$x^2+2x-1=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$．

15.設 $\sqrt{2}+i$ 爲 $f(x)=2x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx-9=0$ 之一根（ a， b， c， d 爲整數），求

(1) $a=$__________． (2) $b=$__________． (3) $c=$__________． (4) $d=$__________．

解答 (1) -1;(2) -4;(3)2;(4)18

解析 ∵方程式爲整係數 ∴即爲實係數方程式 ∴有一根 $\sqrt{2}+i \Rightarrow$ 必有另一根 $\sqrt{2}-i$

又方程式爲整係數 ∴亦即爲有理係數方程式

∴一根 $\sqrt{2}+i \Rightarrow$ 另一根 $-\sqrt{2}+i$

一根 $\sqrt{2}-i \Rightarrow$ 另一根 $-\sqrt{2}-i$

∴原式必含 $[x-(\sqrt{2}+i)][x-(\sqrt{2}-i)][x-(-\sqrt{2}+i)][x-(-\sqrt{2}-i)]$

$=(x^2-2\sqrt{2}x+3)(x^2+2\sqrt{2}x+3)=x^4-2x^2+9$ 之因式

比較 x^5 與常數項得原方程式 $(x^4-2x^2+9)(2x-1)=0$

$\Rightarrow 2x^5-x^4-4x^3+2x^2+18x-9=0$ $\therefore a=-1$， $b=-4$， $c=2$， $d=18$

16.設 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 爲實係數三次多項式,若 $f(3+2i)=-5+4i$,則 $f(3-2i)=$________．

解答 $-5-4i$

解析 $f(x)$爲實係數多項式，z 爲複數，則 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$

故 $f(3-2i)=f(\overline{3+2i})=\overline{f(3+2i)}=\overline{(-5+4i)}=-5-4i$

17. $f(x)$，$g(x)$ 爲實係數多項式,若 $f(1+2i)=3-4i$，$g(3-4i)=1+2i$，求 $f(1-2i)\times g(3+4i)=$______．

解答 $11-2i$

解析 $f(1-2i)\times g(3+4i)=f(\overline{1+2i})\times g(\overline{3-4i})=\overline{f(1+2i)}\times\overline{g(3-4i)}$

$=\overline{(3-4i)}\times\overline{(1+2i)}=(3+4i)(1-2i)=11-2i$

18. $ax^2+(a-1)x-8=0$ 有一根介於1和2之間,另一根介於 -2 和 -1 之間,則 a 值的範圍爲______．

解答 $3<a<\dfrac{9}{2}$

解析 令 $f(x)=ax^2+(a-1)x-8$，利用勘根定理：

$\begin{cases} f(1)f(2)<0 \\ f(-2)f(-1)<0 \end{cases}$，$\begin{cases} (2a-9)(6a-10)<0 \\ (2a-6)(-7)<0 \end{cases}$，$\begin{cases} \dfrac{5}{3}<a<\dfrac{9}{2}\cdots\cdots① \\ a>3\cdots\cdots② \end{cases}$，①∩② $\Rightarrow 3<a<\dfrac{9}{2}$

19.方程式 $f(x)=x^3+x-3=0$ 在 1 與 2 之間有一實根，在誤差要小於 $\frac{1}{10}$ 的情況之下，求其近似值?

解答 1.2

解析 $f(1)=-1<0$， $f(2)=7>0 \Rightarrow$ 根在 1～2 之間

取 1 與 2 中點1.5， $f(1.5)=(1.5)^3+(1.5)-3=1.875>0 \Rightarrow$ 根在 1～1.5 之間

$f(1.1)=(1.1)^3+(1.1)-3=-0.569<0$

$f(1.2)=(1.2)^3+(1.2)-3=-0.072<0$

$f(1.3)=(1.3)^3+(1.3)-3=0.497>0 \Rightarrow$根在$1.2\sim1.3$之間，

取1.2與1.3中點1.25，

$f(1.25)=(1.25)^3+(1.25)-3=0.203125>0 \Rightarrow$根在$1.2\sim1.25$之間，根$\doteq 1.2$

20.若 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求下列各式的值：

(1) $\omega^{2010}=$______. (2) $1+\omega+\omega^2+\dots\dots\dots+\omega^{2010}=$_______. (3) $2\omega^5+3\omega^4+4\omega+5=$______.

解答 (1)1; (2)1 ; (3)$\frac{1+5\sqrt{3}i}{2}$

解析

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \omega^3=1,\quad \omega^2+\omega+1=0=\omega$，則

(1) $\omega^{2010}=(\omega^3)^{670}=1$.

(2) $1+\omega+\omega^2+\dots\dots\dots+\omega^{2010}=1+0\times 670=1$.

(3) $2\omega^5+3\omega^4+4\omega+5=2\omega^2+3\omega+4\omega+5=2(\omega^2+\omega+1)+5\omega+3$

$$=0+5\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+3=\frac{1+5\sqrt{3}i}{2}$$

21.若 $a=\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$， 則$(1+a)(1+a^2)(1+a^3)(1+a^4)=$____________ .

解答 $1+\sqrt{3}i$

解析 $a=\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$，則$(1+a)(1+a^2)(1+a^3)(1+a^4)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)=(-\omega^2)\cdot(-\omega)\cdot 2\cdot(1+\omega)$

$=2(1+\omega)=2(-\omega^2)=-2\omega^2=-2\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=1+\sqrt{3}i$

22.設 x，y 為兩個非零複數，滿足 $x^2+xy+y^2=0$，則 $(\frac{x}{x+y})^{2010}+(\frac{y}{x+y})^{2010}$ 之值為____________ .

解答 -1

解析 $\because\ x^2+xy+y^2=0$，同除 $y^2 \Rightarrow (\frac{x}{y})^2+\frac{x}{y}+1=0$ ，設 $t=\frac{x}{y} \Rightarrow t^2+t+1=0 \Rightarrow$

$\frac{y}{x}=t=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\omega$ ∴ $\omega^3=1$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$

求值式 $=(\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1})^{2010}+(\frac{1}{\frac{x}{y}+1})^{2010}=(\frac{\omega}{1+\omega})^{2010}+(\frac{1}{1+\omega})^{2010}$

$=(\frac{\omega}{-\omega^2})+(\frac{1}{-\omega^2})^{20102010}=\frac{1}{\omega^{2010}}+\frac{1}{\omega^{4020}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=2$

22.a，$b\in\boldsymbol{R}$，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，若 $\frac{1}{3-\omega}=a+b\omega$，則數對$(a, b)$ = ____________ .

解答 $(\frac{4}{13}, \frac{1}{13})$

解析 ∵ $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ∴ $\omega^3=1$且 $1+\omega+\omega^2=0$

又 $\frac{1}{3-\omega}=a+b\omega \Rightarrow 1=(3-\omega)(a+b\omega)=3a+3b\omega-a\omega-b\omega^2$

$\Rightarrow 1=3a+3b\omega-a\omega-b(-1-\omega)=(3a+b)+(-a+4b)\omega$

∴ $\begin{cases}3a+b=1\\-a+4b=0\end{cases} \Rightarrow a=\frac{4}{13}, b=\frac{1}{13}$

23.設 z 為複數，若 $z^2-\frac{1}{z^2}=2i$，則(1) $z^2=$____________ . (2) $z+\frac{1}{z}=$____________ .

解答 (1) i; (2) $\pm\sqrt{2}$

解析 (1) $z^2-\frac{1}{z^2}=2i \Rightarrow$ 設 $z^2=t \Rightarrow t-\frac{1}{t}=2i \Rightarrow t^2-(2i)t-1=0$，

配方 $t^2-2it+i^2=1+i^2 \Rightarrow (t-i)^2=0 \Rightarrow t=i$ 即 $z^2=i$

(2)設 $z=a+bi$（a，$b\in\boldsymbol{R}$） $\Rightarrow z^2=(a^2-b^2)+2abi=0+i$

$\begin{cases}a^2-b^2=0\cdots\cdots①\\2ab=1\quad\cdots\cdots②\end{cases}$，又 $a^2+b^2=1\cdots\cdots③$

由①③ $\Rightarrow 2a^2=1 \Rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，則 $b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow$ 由②，$b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

若 $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$，則 $z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{i+1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=\sqrt{2}$

若 $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$，則 $z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{i+1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=-\sqrt{2}$ 故 $z+\frac{1}{z}=\pm\sqrt{2}$