高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：99.11.03
範圍	2-3 多項方程式	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（ 每題 10 分 ）

1. 設複數 $z_1 = 2+\sqrt{3}\ i$， $z_2 = 2-\sqrt{3}\ i$，求下列各式：

(1) $z_1 + z_2$ =________________ (2) $z_1 - z_2$ =________________

(3) $z_1 \cdot z_2$ =________________ (4) $z_1^{\ 2}$ =________________

解答 (1)4;(2) $2\sqrt{3}i$;(3)7;(4) $1+4\sqrt{3}i$

解析 (1) $z_1 + z_2 = \left(2+\sqrt{3}i\right)+\left(2-\sqrt{3}i\right)=\left(2+2\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)i=4$.

(2) $z_1 - z_2 = \left(2+\sqrt{3}i\right)-\left(2-\sqrt{3}i\right)=\left(2-2\right)+\left(\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right)i=2\sqrt{3}i$.

(3) $z_1 \cdot z_2 = \left(2+\sqrt{3}i\right)\left(2-\sqrt{3}i\right)=2^2-\left(\sqrt{3}i\right)^2=4-\left(-3\right)=7$.

(4) $z_1^{\ 2} = \left(2+\sqrt{3}i\right)^2 = 4+4\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}i\right)^2=\left(4-3\right)+4\sqrt{3}i=1+4\sqrt{3}i$.

2. 將下列複數表示成 $a+bi$ 的形式，其中 a, b 是實數.

(1) $i+\dfrac{1}{i}$ =________________ (2) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ =________________.

解答 (1) $0+0i$;(2) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

解析 (1) $i+\dfrac{1}{i}=i+\dfrac{i}{i^2}=i+\left(-i\right)=0=0+0i$.

(2) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{1+2\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}i\right)^2}{1-\left(\sqrt{3}i\right)^2}=\dfrac{\left(1-3\right)+2\sqrt{3}i}{1-\left(-3\right)}$

$=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 化簡 $\dfrac{(3-\sqrt{-16})\ \cdot\ (-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}$ 爲標準式得____________ .

解答 $7-i$

解析 $\dfrac{(3-\sqrt{-16})\ \cdot\ (-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}=\dfrac{(3-4i)(-1+5i)}{2+3i}$

$=\dfrac{(-3+20)+(4+15)i}{2+3i}=\dfrac{17+19i}{2+3i}=\dfrac{(17+19i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{(34+57)+(38-51)i}{4+9}=\dfrac{91-13i}{13}=7-i$

4. 化簡$\dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}=$____________ .

解答 $-\dfrac{i}{3}$

解析 原式$=\dfrac{5i-4i+1}{8i-5i-3}=\dfrac{1+i}{-3+3i}=\dfrac{(1+i)(-3-3i)}{(-3+3i)(-3-3i)}=\dfrac{-3-3i-3i-3i^2}{9-(9i^2)}=\dfrac{-6i}{18}=-\dfrac{i}{3}$

5. $i=\sqrt{-1}$，求下列各值：(1) i^{50} =____________ ， (2) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{50}$ =________________.

解答 (1) -1;(2) $-1+i$

解析 (1) $i^{50}=i^{48}\cdot i^2=\left(i^4\right)^{12}\cdot i^2=-1$.

(2) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{50}$ $=[i+(-1)+(-i)+1]+[i+(-1)+(-i)+1]+\cdots+i+(-1)$

$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{0\times12}+i+(-1)=-1+i$.

6. x，$y\in\boldsymbol{R}$，若$\dfrac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則數對$(x，y)=$____________ .

解答 (2，1)

解析 ∵ $\dfrac{1+3i}{x+yi}=1+i$ ∴ $x+yi=\dfrac{1+3i}{1+i}=\dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$

∵ $x，y\in R$ ∴ $x=2，y=1$

7. 複數$(-2+\sqrt{3}\,i)^4$的(1)實部爲____________ . (2)虛部爲____________ .

解答 (1)– 47;(2)– $8\sqrt{3}$

解析 $(-2+\sqrt{3}\,i)^4=[(-2+\sqrt{3}i)^2]^2=(4-4\sqrt{3}\,i-3)^2=1-8\sqrt{3}\,i-48=-47-8\sqrt{3}\,i$

實部爲 -47，虛部爲 $-8\sqrt{3}$

8. 已知複數z的實部爲 2, 而$\dfrac{1}{z}$的虛部爲$\dfrac{1}{4}$，求$z=$________________ .

解答 $2-2i$

解析 設$z=2+yi$，（y爲實數），則$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2+yi}=\dfrac{2-yi}{4+y^2}=(\dfrac{2}{4+y^2})+(\dfrac{-y}{4+y^2})i$,

虛部$\dfrac{-y}{4+y^2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow-4y=y^2+4,\ y^2+4y+4=0$，得$y=-2$,故$z=2-2i$.

9. 設$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，則$1+z^{88}+\sqrt{2}\,z^{1999}=$____________ .

解答 $3-i$

解析 $\because\ z^2=(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2=\frac{1+2i-i^2}{2}=i$

$\therefore\ z^{88}=(z^2)^{44}=1$

$z^{1999}=z^{1998}\cdot z=(z^2)^{999}\cdot z=(i)^{999}\cdot z=i^{996}\cdot i^3\cdot z=(i^4)^{249}\cdot(-i)z=-iz$

故 $1+z^{88}+\sqrt{2}\,z^{1999}=1+1+\sqrt{2}\,(-i)\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}=2-i(1+i)=2-i+1=3-i$

10. 設 a, b 是實數，若 $2+(4-a)\ i=(b-3)+bi$，分別求 a, b 的值=________________.

解答 $a=-1, b=5$

解析 由 $\begin{cases}2=b-3,\\4-a=b,\end{cases}$ 得 $a=-1$， $b=5$.

11. 設 x， y 是實數，若 $(1+i)(x+2y)-(3-2i)(x-y)=8+3i$，求

(1) $x=$____________ . (2) $y=$____________ .

解答 (1) $x=1$;(2) $y=2$

解析 左式 $=x+2y+xi+2yi-(3x-3y-2xi+2yi)=(-2x+5y)+(3x)i=8+3i$

$\therefore \begin{cases}-2x+5y=8\\3x=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

12. 設 a，$b\in \boldsymbol{R}$ 且 $[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i$，則 $\overline{a+bi}=$____________ .

解答 $-4-11i$

解析 $[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i \Rightarrow (a+1+5)+(-4+b-2)i=2+5i$

$\Rightarrow (a+6)+(b-6)\,i=2+5i \Rightarrow \begin{cases}a+6=2\\b-6=5\end{cases}\ \therefore \begin{cases}a=-4\\b=11\end{cases}$，

$\therefore\ \overline{a+bi}=\overline{-4+11i}=-4-11i$

13. 解下列各方程式：

(1) $x^2+2x-4=0.$ $x=$_________. (2) $2x^2-2x+5=0$ $x=$_________.

解答 (1) $x=-1+\sqrt{5}$ 或 $x=-1-\sqrt{5}$;(2) $x=\frac{1+3i}{2}$ 或 $\frac{1-3i}{2}$

解析 (1)利用公式解 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，得

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-(-16)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}$，故 $x=-1+\sqrt{5}$ 或 $x=-1-\sqrt{5}$.

(2) $x=\frac{2\pm\sqrt{4-40}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{4}=\frac{2\pm6i}{4}=\frac{1\pm3i}{2}$， 故 $x=\frac{1+3i}{2}$ 或 $x=\frac{1-3i}{2}$.

14. 解 $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x+1)-1=0$，則 $x=$____________ .

解答 $-1\pm\sqrt{5}$ 或 -1

解析　設 $x^2+2x=A$ $\Rightarrow$ 原式爲 $A^2-3(A+1)-1=0$ $\Rightarrow$ $A=4$ 或 -1

$\Rightarrow$ $x^2+2x=4$ 或 $x^2+2x=-1$ $\Rightarrow$ $x=-1\pm\sqrt{5}$ 或 -1

15. 設 $x^2-2x-k=0$，無實數解，試求 k 範圍____________.

解答　$k<-1$

解析　$D<0$ $\Rightarrow$ $2^2+4k<0$ $\Rightarrow$ $k<-1$

16.設 a 爲實數，若方程式 $x^2-(a+i)x+2+2i=0$ 有一實根，試求 a 的值爲____________.

解答　3

解析　設實根爲 k，則 $k^2-(a+i)k+2+2i=0$ $\Rightarrow$ $(k^2-ak+2)+(-k+2)i=0$

解 $\begin{cases}k^2-ak+2=0\\-k+2=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=3\\k=2\end{cases}$

17.設 $i=\sqrt{-1}$，若 $1-i$ 爲 $x^2-cx+1=0$ 之一根，則複數 $c=$____________.（以 $a+bi$ 的形式表示）

解答　$\dfrac{3-i}{2}$

解析　$\because$ $1-i$ 爲 $x^2-cx+1=0$ 之一根代入 $\therefore$ $(1-i)^2-c(1-i)+1=0$

$\Rightarrow$ $1-2i+i^2-c(1-i)+1=0$ $\Rightarrow$ $c(1-i)=1-2i$

$\Rightarrow$ $c=\dfrac{1-2i}{1-i}=\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i-2i-2i^2}{1-i^2}=\dfrac{1-i+2}{1+1}=\dfrac{3-i}{2}$

18.設 $a\in\boldsymbol{R}$，若二次方程式 $x^2-ax-a+8=0$ 有相等實根，則 a 爲____________.

解答　4 或 -8

解析　$a\in\boldsymbol{R}$，$x^2-ax-a+8=0$ 有相等實根，

則 $D=(-a)^2-4(-a+8)=0$ $\Rightarrow a^2+4a-32=0\Rightarrow(a-4)(a+8)=0$ $\Rightarrow a=4$ 或 -8

19. 已知 α,β 爲方程式 $5x^2-7x+4=0$ 的兩根，求下列各值：

(1) $\alpha^2+\beta^2=$________.　(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=$________.　(3) $\alpha^3+\beta^3=$________

(4) $(5\alpha^2+3\alpha+3)(5\beta^2+3\beta+3)=$________________.

解答　(1) $\dfrac{9}{25}$;　(2) $\dfrac{7}{4}$;　(3) $-\dfrac{77}{125}$;　(4) 65

解析　由根與係數的關係，得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-\left(\dfrac{-7}{5}\right)=\dfrac{7}{5},\\ \alpha\beta=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{7}{5}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{49}{25}-\dfrac{8}{5}=\dfrac{9}{25}$.

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{7}{4}$.

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(\frac{7}{5})^3-3\cdot\frac{4}{5}(\frac{7}{5})=-\frac{77}{125}$

(4) $(5\alpha^2+3\alpha+3)(5\beta^2+3\beta+3)=[(5\alpha^2-7\alpha+4)+10\alpha-1][(5\beta^2-7\beta+4)+10\beta-1]$

$=[0+10\alpha-1][0+10\beta-1]$

$=100\alpha\beta-10(\alpha+\beta)+1=100\times\frac{4}{5}-10\times\frac{7}{5}+1=65$

20.設 α，β 為 $2x^2-3x+4=0$ 的兩根，則

(1) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=$__________ . (2)以 $\frac{\beta}{\alpha}$，$\frac{\alpha}{\beta}$ 為二根的方程式為_______________ .

解答 (1) $-\frac{7}{8}$; (2) $8x^2+7x+1=0$

解析 由根與係數的關係，得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{3}{2},\\ \alpha\beta=\frac{4}{2}=2.\end{cases}$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot2=-\frac{7}{4}$. $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{7}{4}}{2}=-\frac{7}{8}$

(2) 以 $\frac{\beta}{\alpha}$，$\frac{\alpha}{\beta}$ 為二根的方程式為 $x^2-(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha})x+(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha})=0$

$\Rightarrow x^2+\frac{7}{8}x+1=0$, 即$8x^2+7x+1=0$

21.x，y 為實數且 $x+y+10=(4-xy)i$，則$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=$__________ .

解答 – 14

解析 ∵ x，$y\in\mathbf{R}$，∴ $x+y+10\in\mathbf{R}$ 且 $4-xy\in\mathbf{R}$

$\Rightarrow \begin{cases}x+y+10=0\\4-xy=0\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x+y=-10\\xy=4\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x<0$ 且 $y<0$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=(x+y)-2\sqrt{xy}=-10-2\times\sqrt{4}=-14$

22.設 $z^2=5-12i$，則(1) $z=$__________ . (2) $z^2-5z+\frac{13}{z}=$__________ .

解答 (1) $\pm(3-2i)$;(2) $17-24i$ 或– 7

解析 (1)設 $z^2=(x+yi)^2=5-12i$，x，$y\in\mathbf{R}$

$x^2+2xyi+y^2i^2=5-12i$

$\Rightarrow$ $x^2-y^2=5$……①，

$2xy=-12$……②

∴ $x^2+y^2=13$……③，$\frac{①+③}{2}\Rightarrow x^2=9$ ，$x=\pm3$，代入②

∴ $y=\mp2$ $\Rightarrow$ $z=x+yi=$ $3-2i$ 或$-3+2i$

P.S.

$|(x+yi)^2|=|5-12i|$

$\Rightarrow(\sqrt{x^2+y^2})^2=\sqrt{5^2+(-12)^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2=13$

(2)$z^2-5z+\dfrac{13}{z}=z^2+\dfrac{-5z^2+13}{z}$

$=(5-12i)+\dfrac{-5(5-12i)+13}{\pm(3-2i)}$

$=(5-12i)\pm\dfrac{(-12+60i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$

$=(5-12i)\pm\dfrac{(-36-120)+(180-24)i}{3^2+2^2}$

$=(5-12i)\pm\dfrac{-156+156i}{13}$

$=(5-12i)\pm(-12+12i)$

$=-7$ 或 $17-24i$

23.設 k 為給定之有理數，且對任一有理數 m，恆使方程式 $x^2-3(m-1)x+2m^2+3k=0$ 之根為有理數，則 $k=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　-6

解析

根為有理數則判別式為完全平方式

$\Rightarrow[-3(m-1)]^2-4\cdot1\cdot(2m^2+3k)=9(m-1)^2-4(2m^2+3k)=m^2-18m+(9-12k)$為完全平方式

$\therefore\ D=0\Rightarrow(-18)^2-4\cdot1\cdot(9-12k)=0\Rightarrow81-(9-12k)=0$，則 $k=-6$