高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.10.27					
範圍	2-2 餘式、因式定理(2)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題'10 分)

1. 設 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$，試求 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為________________.

解答　$2x+5$

解析　設 $f(x)=(x^2+x+1)q(x)+ax+b$，

$(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+x+1)q(x)+(ax+b)(x+1)$

$=(x+1)(x^2+x+1)q(x)+ax^2+(a+b)x+b$

$=(x^2+x+1)[(x+1)q(x)+a]+bx+(b-a)$，

得 $b=5$， $b-a=3$， 即 $a=2$， 故餘式為 $2x+5$.

$$\begin{array}{r|lll} & a & & \\ 1+1+1 & a+ & (a+b)+ & b \\ & a+ & a\ + & a \\ \hline & & & b+(b-a) \end{array}$$

2. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(0)=2$， $f(1)=0$， $f(2)=0$， $f(3)=8$，試求 $f(x)$ 為______________.

解答　$f(x)=x^3-2x^2-x+2$

解析　(一)由插值多項式：

$$f(x)=8\cdot\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}+2\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+0\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-0)}{(1-2)(1-3)(1-0)}+0\cdot\frac{(x-3)(x-0)(x-1)}{(2-3)(2-0)(2-1)}$$

$$=\frac{4}{3}x(x-1)(x-2)-\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$=(x-1)(x-2)(x+1)=x^3-2x^2-x+2$.

(二)設 3 次多項式 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$

$x=0\Rightarrow f(0)=2b=2,\quad b=1$

$x=3\Rightarrow f(3)=2(3a+b)=8,\quad a=1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x+1)=x^3-2x^2-x+2$

3.a，b 為常數，若 $2x-3$ 與 $3x+1$ 均為 $ax^3+bx^2-47x-15$ 的因式，則數對$(a，b)=$______________.

解答　(24，2)

解析　令 $f(x)=ax^3+bx^2-47x-15$

$2x-3\mid f(x)\quad\Rightarrow\quad f(\frac{3}{2})=0\Rightarrow\quad\frac{27}{8}a+\frac{9}{4}b-\frac{141}{2}-15=0\quad\Rightarrow\quad 3a+2b=76$……①

$3x+1\mid f(x)\quad\Rightarrow\quad f(\frac{-1}{3})=0\Rightarrow\quad-\frac{1}{27}a+\frac{1}{9}b+\frac{47}{3}-15=0\quad\Rightarrow-a+3b=-18$……②

① + ② × 3　$11b=76-54=22$　∴　$b=2$ 代入②得 $a=24$

4. 小熹練習多項式的除法中，有四次多項式 $f(x)$，而且經計算後得知， $f(x)$ 除以 $(x-1)^3$ 得餘式 3， $f(x)$ 除以 $(x-2)$， $(x+2)$ 分別得餘式 6 及 30，試求多項式 $f(x)$ 為________________.

解答　$f(x)=x^4-2x^3+2x+2$

解析　設 $f(x)=(x-1)^3(ax+b)+3$， $f(2)=(2a+b)+3=6$， $f(-2)=(-27)(-2a+b)+3=30$，

由 $2a+b=3$， $-2a+b=-1$，得 $a=1$， $b=1$，

$f(x)=(x-1)^3(x+1)+3$，即 $f(x)=x^4-2x^3+2x+2$.

5.(1)求 $x^7-100x+10$ 除以 $x+2$ 的餘式為______________ .

(2) $f(x)=2x^5-13x^4-9x^3+11x^2+15x-17$，求 $f(7)$ 之值為______________ .

解答　(1)82;(2) -59

解析

(1)由餘式定理知：

$x^7-100x+10$ 除以 $x+2$ 的餘式為 $f(-2)=(-2)^7-100(-2)+10=-128+200+10=82$.

(2)由餘式定理知：

$f(7)$ 就是 $f(x)$ 除以 $x-7$ 之餘式，利用綜合除法：

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & -13 & -9 & +11 & +15 & -17 & 7 \\ & +14 & +7 & -14 & -21 & -42 & \\ \hline 2 & +1 & -2 & -3 & -6, & -59 & \end{array}$$

得 $f(7)=-59$.

6.求多項式 $2x^5-3x^3+8x^2+4x-7$ 除以 x^2-2x+3 的商式為______________.及餘式為___________ .

解答　商式為 $2x^3+4x^2-x-6$，餘式為 $-5x+11$

解析　用分離係數法，其中被除式的 4 次項係數為 0：

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & +4 & -1 & -6 & & \\ \hline 1-2+3 & 2 & +0 & -3 & +8 & +4 & -7 \\ & 2 & -4 & +6 & & & \\ \cline{2-7} & & 4 & -9 & +8 & & \\ & & 4 & -8 & +12 & & \\ \cline{3-7} & & & -1 & -4 & +4 & \\ & & & -1 & +2 & -3 & \\ \cline{4-7} & & & & -6 & +7 & -7 \\ & & & & -6 & +12 & -18 \\ \cline{5-7} & & & & & -5 & +11 \end{array}$$

得商式為 $2x^3+4x^2-x-6$，餘式為 $-5x+11$.

7.設多項式 $f(x)=2x^3-9x^2+6x+5$，試求常數 $a,\ b,\ c,\ d$，使

$f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$.則序對 $(a,b,c,d)=$______________ .

解答　$a=4,\ b=-7,\ \ c=3,\ d=2$

解析　(SOL 一)依下列步驟求 $a,\ b,\ c,\ d$：

① $f(x)$ 除以 $x-1$，所得餘式為 a .

②上面所得的商，除以 $x-2$，所得的餘式為 b .

③上面所得的商，除以 $x-3$，所得的餘式為 c .

④上面所得的商就是 d .

用綜合除法連續除以 $x-1,\ x-2,\ x-3$ 如下：

$$
\begin{array}{cccc|c}
2 & -9 & +6 & +5 & 1 \\
 & +2 & -7 & -1 & \\
\hline
2 & -7 & -1 & +4 \to a & \\
 & +4 & -6 & 2 & \\
\hline
2 & -3 & -7 \to b & & \\
 & +6 & 3 & & \\
\hline
2 & +3 \to c & & & \\
\downarrow & & & & \\
d & & & &
\end{array}
$$

故 $a=4,\ b=-7,\ c=3,\ d=2$.

(SOL 二)代值法

分別以 $x=1,2,3$ 代入 $f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$ 等號兩邊

$x=1 \Rightarrow 2-9+6+5=a+0+0+0,\quad a=4$

$x=2 \Rightarrow 16-36+12+5=a+b+0+0,\quad b=-7$

$x=3 \Rightarrow 54-81+18+5=a+2b+2c+0,\quad c=3$

$x=0 \Rightarrow 5=a-b+2c-6d,\quad d=2$

故 $a=4,\ b=-7,\ c=3,\ d=2$.

8.設 $f(x)=3x^4-4x^3-7x^2-x+5$，求 $f(-\frac{2}{3})=$______________ .

解答 $\frac{13}{3}$

解析 由於 $f(-\frac{2}{3})$ 就是 $f(x)$ 除以 $x+\frac{2}{3}$ 的餘式，故可用綜合除法

$$
\begin{array}{ccccc|c}
3 & -4 & -7 & -1 & +5 & -\frac{2}{3} \\
 & -2 & +4 & +2 & -\frac{2}{3} & \\
\hline
3 & -6 & -3 & +1 & +\frac{13}{3} &
\end{array}
$$

得到 $f(-\frac{2}{3})=\frac{13}{3}$.

9.設多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 2，且 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 -7，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 的餘式為______________. .

解答 $3x-1$

解析 除式 $(x-1)(x+2)$ 是二次，餘式至多一次，可設為 $ax+b$，

令 $f(x)=(x-1)(x+2)q(x)+(ax+b)$，

則 $f(1)=(1-1)(1+2)q(1)+(a+b)=a+b$，又由餘式定理知 $f(1)=2$，故 $a+b=2$ ……①，

又 $f(-2)=(-2-1)(-2+2)q(-2)+(-2a+b)=-2a+b$，得 $-2a+b=-7$ ……②，

聯立解①②可得 $a=3,\ b=-1$，故 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 的餘式為 $3x-1$.

10.設 $f(x)$ 是至多二次的多項式，已知 $f(2)=4,\ f(-1)=1,\ f(-2)=-8$，求 $f(x)$ 為＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　$f(x)=-2x^2+3x+6$

解析　取拉格朗日插值多項式

$$f(x)=4\cdot\frac{(x+1)(x+2)}{(2+1)(2+2)}+1\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(-1-2)(-1+2)}+(-8)\cdot\frac{(x-2)(x+1)}{(-2-2)(-2+1)}$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+3x+2)-\frac{1}{3}(x^2-4)-2(x^2-x-2)=-2x^2+3x+6\ .$$

11.設 $a,\ b,\ c$ 為實數，且圖形通過 $(1,1),\ (2,3),\ (4,9)$ 的多項式函數為 $f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$，求序對$(a,\ b,\ c)$為＿＿＿＿＿＿＿＿. 及 $f(3)$ 為＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　$a=1$，$b=2$，$c=\frac{1}{3}$，$f(3)=\frac{17}{3}$

解析　$f(1)=a=1$，得 $a=1$，

$f(2)=a+b=3$，得 $b=2$，

$f(4)=a+3b+6c=9$，得 $c=\frac{1}{3}$，

故 $f(3)=1+2\times(3-1)+\frac{1}{3}\times(3-1)\times(3-2)=\frac{17}{3}$.

12.求多項式 $x^{20}+x^{10}+x^5-2$ 除以 $x+1$ 的餘式為＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　-1

解析　$f(-1)=(-1)^{20}+(-1)^{10}+(-1)^5-2=1+1-1-2=-1$，餘式為 -1 .

13.設多項式 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 -3，且 $f(x)$ 除以 $2x-3$ 的餘式為 4，求 $f(x)$ 除以 $(x+1)(2x-3)$ 的餘式為＿＿＿＿＿＿＿＿. .

解答　$\frac{14}{5}x-\frac{1}{5}$

解析　令 $f(x)=(x+1)(2x-3)q(x)+ax+b$，

則 $f(-1)=-a+b=-3$，$f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}a+b=4$，

得 $a=\frac{14}{5}$，$b=\frac{-1}{5}$，即餘式為 $\frac{14}{5}x-\frac{1}{5}$.

14.設多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，已知 $f(1)=f(\sqrt{2})=f(\frac{5}{3})=f(\pi)=0$，求則序對 $(a,b,c,d)=$＿＿.

解答　$a=b=c=d=0$

解析　因為 $f(x)$ 有 $(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\frac{5}{3})(x-\pi)$ 的因式，且次數又不超過 3 次，

則 $f(x)$ 必為零多項式，故 a，b，c，d 均為 0 .

15.多項式 $f(x)$ 除以 x^2-2x+1 的商式為 $x-1$，餘式為 $2x-3$，求 $f(x)$ 為＿＿＿＿＿＿＿＿.

解答　x^3-3x^2+5x-4

解析 $f(x)=(x^2-2x+1)(x-1)+(2x-3)$，即 $f(x)=x^3-3x^2+5x-4$.

16.多項式 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $x+2$， $g(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $2x-1$，求：

(1) $f(x)+g(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為______________ .

(2) $f(x)g(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為______________ .

解答 (1) $3x+1$;(2) $x-4$

解析 (1)設 $f(x)=(x^2+x+1)q_1(x)+(x+2)$，

$g(x)=(x^2+x+1)q_2(x)+(2x-1)$，

則 $f(x)+g(x)=(x^2+x+1)[q_1(x)+q_2(x)]+[(x+2)+(2x-1)]$，

$\therefore$餘式為 $(x+2)+(2x-1)=3x+1$.

(2) $f(x)g(x)$

$=(x^2+x+1)[q_1(x)q_2(x)(x^2+x+1)+q_1(x)(2x-1)+q_2(x)(x+2)]+(x+2)(2x-1)$，

$\therefore$餘式為 $(x+2)(2x-1)$ 除以 x^2+x+1 的餘式，即 $x-4$.

17.設 a，b 是實數， $f(x)=2x^4+x^3-ax^2+4x+b$ 可被 x^2+x-3 整除，求 a，b 之值為_____________ .

解答 $a=6$， $b=-3$

解析 利用長除法，因 $f(x)$ 可被 x^2+x-3 整除，故餘式為 0，

可得 $6-a=0$，且 $b+3=0$，

解得 $a=6$， $b=-3$.

18.設 $f(x)=2x^4-3x^3-3x^2+7x+2$，若 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 得商式為 x^2-2，餘式為 $x+4$，試求 $g(x)$ 為

______________ . .

解答 $g(x)=2x^2-3x+1$

解析 $f(x)=g(x)(x^2-2)+x+4$， $f(x)-(x+4)=(x^2-2)g(x)$，

$2x^4-3x^3-3x^2+6x-2=(x^2-2)g(x)$，由長除法得 $g(x)=2x^2-3x+1$.