

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：99.10.08				
範圍	2-2 多項式的四則運	班級	一年___班	姓名
	算(1)	座號		

一、填充題 (每題'10分)

1. 設 $f(x)$ 為一多項式, 若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $2x-1$, 則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為_____。

解答 $3x+2$

解析 設 $f(x)$ 被 x^2+x+1 除之餘式為 $ax+b$, 商式 $Q(x)$, 由除法原理知

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)Q(x) + (ax+b) \\ \Rightarrow (x+1)f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)(x+1) + (ax+b)(x+1) \\ &= (x^2+x+1)Q(x)(x+1) + a(x^2+x+1) + bx + (b-a) \\ &= (x^2+x+1)[Q(x)(x+1) + a] + bx + (b-a), \end{aligned}$$

此式表 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $bx+(b-a)$,

得 $bx+(b-a)=2x-1$, 故 $b=2$, $a=3$, 所求之餘式為 $ax+b=3x+2$ 。

2. 多項式 $f(x)$ 滿足 $8f(x) - 5x^6f(x^3) - 2f(x^2) + 18 = 0$, 則 $f(x)$ 的常數項為_____。

解答 -3

解析 $f(x)$ 的常數項為 $f(0)$

由 $8f(x) - 5x^6f(x^3) - 2f(x^2) + 18 = 0$, 代 $x=0$

$$\therefore 8f(0) - 0 - 2f(0) + 18 = 0 \quad \therefore f(0) = -3$$

3. 多項式 $x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ 除以 $f(x)$ 的商式為 $x-2$, 餘式為 $2x-5$, 則 $f(x) =$ _____。

解答 $x^2 - 2x - 1$

解析 $x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = f(x)(x-2) + 2x - 5 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{x-2} = x^2 - 2x - 1$

4. 求多項式 $x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 18$ 除以 $x^2 + x + 2$ 的(1)商 = _____ (2)餘式 = _____。

解答 (1) $x^2 - 3x + 9$; (2) 0

解析

$$\begin{array}{r} 1-3+9 \\ 1+1+2 \overline{) 1-2+8+3+18} \\ \underline{1+1+2} \\ -3+6+3 \\ \underline{-3-3-6} \\ 9+9+18 \\ \underline{9+9+18} \\ 0 \end{array} \quad \text{商為 } x^2 - 3x + 9, \text{ 餘式 } 0$$

5. 設多項式 $f(x)$ 除以 x^3+1 的餘式為 $2x^2+x+3$, 求 $f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為_____。

解答 $3x+1$

解析 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$$f(x) \div (x+1)(x^2-x+1) \cdots \cdots 2x^2+x+3 \Rightarrow f(x) \div (x^2-x+1) \cdots \cdots 2x^2+x+3$$

(但不符除法原理, 餘式次數小於除式次數), 所以再除

$$(2x^2+x+3) \div (x^2-x+1) \cdots \cdots 3x+1, \text{ 故餘式為 } 3x+1$$

6. 設 $f(x)$ 為一多項式, $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$, 以 $x - \frac{b}{a}$ 除 $f(x)$ 所得之商式為 $Q(x)$, 餘式為 r , 則以 $x - b$ 除 $f(\frac{x}{a})$ 所得之商式為_____.

解答 $\frac{Q(\frac{x}{a})}{a}$

解析 $\because f(x) = (x - \frac{b}{a})Q(x) + r \quad \therefore f(\frac{x}{a}) = (\frac{x}{a} - \frac{b}{a})Q(\frac{x}{a}) + r = (x - b)\frac{Q(\frac{x}{a})}{a} + r$

故以 $x - b$ 除 $f(\frac{x}{a})$ 所得之商式為 $\frac{Q(\frac{x}{a})}{a}$

7. 設 $f(x)$ 以 $x - \frac{b}{a}$ 除之商為 $q(x)$, 餘式為 r , 則 $xf(x) + 2$ 被 $(ax - b)$ 除之商式為_____.

解答 $\frac{x}{a}q(x) + \frac{r}{a}$

解析 $f(x) = (x - \frac{b}{a})q(x) + r$

$\Rightarrow xf(x) + 2 = (x - \frac{b}{a})xq(x) + xr + 2 = (ax - b)\frac{x}{a}q(x) + (ax - b)\frac{r}{a} + \frac{br}{a} + 2$ (再除得之)

$= (ax - b)(\frac{x}{a}q(x) + \frac{r}{a}) + \frac{br}{a} + 2$

$\therefore xf(x) + 2$ 被 $(ax - b)$ 除之商式為 $\frac{x}{a}q(x) + \frac{r}{a}$

8. 設 $x^2 - x + 2$ 除 $x^4 - x^3 + x^2 + ax + 3$ 的餘式為 $2x + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, 則數對 $(a, b) =$ _____.

解答 $(3, 5)$

解析 $\because x^2 - x + 2$ 除 $x^4 - x^3 + x^2 + ax + 3$ 的餘式為 $2x + b$

$\therefore x^2 - x + 2 \mid (x^4 - x^3 + x^2 + ax + 3) - (2x + b) = x^4 - x^3 + x^2 + (a - 2)x + (3 - b)$

$$\begin{array}{r} 1 + 0 - 1 \\ 1 - 1 + 2 \overline{) 1 - 1 + 1 + (a - 2) + (3 - b)} \\ \underline{1 - 1 + 2} \\ \quad - 1 + (a - 2) + (3 - b) \\ \quad - 1 + \quad 1 \quad - \quad 2 \\ \hline \qquad (a - 3) + (5 - b) \end{array}$$

$\therefore a - 3 = 0$ 且 $5 - b = 0 \quad \therefore a = 3, b = 5$

9. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$, $g(x) = x^2 - 4x + b$, 已知 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式, 則

(1) $a =$ _____ . (2) $b =$ _____ .

解答 (1)6;(2)2

解析 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$ 是 $g(x) = x^2 - 4x + b$ 的倍式, 即 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 用綜合除法

$$\begin{array}{r}
 2 - 5 \quad - 8 \quad + a \\
 \quad + 12 \\
 \quad \quad 2b \quad - 3b \\
 \hline
 2 + 3 \quad , \quad 4 - 2b \quad a - 3b
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} 4 \\ -b \end{array} \right.$$

餘式為 0，故 $4 - 2b = 0$ ， $a - 3b = 0$ 得 $b = 2$ ， $a = 6$

10. 若 $x^3 + 3x^2 + mx + 2$ 可被 $x^2 + nx + 1$ 整除，則 $(m, n) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 (3, 1)

解析

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1+n+1 \overline{) 1 + \quad 3 + \quad m+2} \\
 \underline{1 + \quad n + \quad 1} \\
 (3-n) + (m-1) + 2
 \end{array}$$

$$\because \text{整除} \quad \therefore \frac{3-n}{1} = \frac{m-1}{n} = \frac{2}{1}, \text{ 則 } \begin{cases} \frac{3-n}{1} = \frac{2}{1} \\ \frac{m-1}{n} = \frac{2}{1} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}, \text{ 故數對 } (m, n) = (3, 1)$$

11. 設 $\frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$ ，則實數序對 $(A, B, C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 (1, -7, 8)

解析 利用 $\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow b = c$

$$\therefore \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) = 2x^2 - x + 1$$

$$\text{令 } x=1, 2A=2 \quad \therefore A=1$$

$$\text{令 } x=2, -B=7 \quad \therefore B=-7$$

$$\text{令 } x=3, 2C=16 \quad \therefore C=8$$

12. 下式是小明利用綜合除法計算三次多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的算式，因不小心將飲料翻倒在計算紙上，所以只能辨識部分數字：（無法辨識的數字以英文字母代替）若小明沒有計算錯誤，求 $a+b+c+d$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$$\begin{array}{r}
 a \quad +b \quad +c \quad +d \quad | \quad 1 \\
 +) \quad \quad 5 \quad +e \quad +f \quad | \\
 \hline
 g \quad +3 \quad +h \quad | \quad -8
 \end{array}$$

解答 -8

解析 $a = g, g \times 1 = 5 \quad \therefore g = 5, b + 5 = 3 \quad \therefore b = -2, 3 \times 1 = e \quad \therefore e = 3$

$$\text{又 } c + e = h \quad \therefore c + 3 = h, h \times 1 = f, d + f = -8$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 5 + (-2) + (h - 3) + (-8 - f) = 5 + (-2) + (f - 3) + (-8 - f) = -8$$

13. 設 $\deg f(x) = 3$ ，已知 $f(1) = f(2) = f(3) = 4$ ， $f(4) = 34$ ，則 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 $5(x-1)(x-2)(x-3)+4$

解析 $\because f(1)=f(2)=f(3)=4 \therefore f(x)$ 除以 $x-1, x-2, x-3$ 都餘 4

設 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+4$

$\therefore f(4)=34 \therefore a(3)(2)(1)+4=34 \therefore a=5$

$\therefore f(x)=5(x-1)(x-2)(x-3)+4$

14. 設 $g(x)=16x^4-8x^3-28x^2+16x+5=a(2x-1)^4+b(2x-1)^3+c(2x-1)^2+d(2x-1)+e$, 則

(1) 序組 $(a, b, c, d, e) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $g(0.499) = \underline{\hspace{2cm}}$. (求近似值到小數第三位, 第四位四捨五入)

解答 (1) $(1, 3, -4, -5, 6)$; (2) 6.010

解析 (1)

$$\begin{array}{r} 16-8-28+16+5 \quad \left| \frac{1}{2} \right. \\ \quad \quad \quad +8+0-14+1 \\ \hline 2 \overline{) 16+0-28+2+6} \rightarrow e \\ \quad \quad \quad 8+0-14+1 \\ \quad \quad \quad +4+2-6 \\ \hline 2 \overline{) 8+4-12,-5} \rightarrow d \\ \quad \quad \quad 4+2-6 \\ \quad \quad \quad +2+2 \\ \hline 2 \overline{) 4+4,-4} \rightarrow c \\ \quad \quad \quad 2+2 \\ \quad \quad \quad +1 \\ \hline 2 \overline{) 2,+3} \rightarrow b \\ \quad \quad \quad 1 \rightarrow a \end{array}$$

得序組 $(a, b, c, d, e) = (1, 3, -4, -5, 6)$

(2) 由(1), $g(x) = (2x-1)^4 + 3(2x-1)^3 - 4(2x-1)^2 - 5(2x-1) + 6$

則 $g(0.499) = 6 - 5 \times (-0.002) - 4(-0.002)^2 + \dots = 6.009984\dots \approx 6.010$